

INTROD. VCOMPLEXAS- AGOSTO DE 2006–Lista8

Professor: Ricardo Sá Earp

APLICAÇÕES E MAPEAMENTOS CONFORMES

- 1) Lembre-se que a equação geral de uma reta ou círculo no plano complexo é da forma

$$\alpha z\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0$$

onde $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$, $|\beta|^2 > \alpha\gamma$.

- a) Mostre que a aplicação $f(z) = 1/z$ é uma aplicação conforme que leva círculos ou retas em círculos ou retas, analisando separadamente os casos em que o círculo ou reta passa pela origem.
- b) Mostre que a aplicação $\varphi : z \mapsto \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a$, onde $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ deixa fixo todos os pontos do círculo C_a de raio r e centro a , e leva cada círculo C ortogonal a C_a em si mesmo.
- c) No exercício anterior mostre que quando $a = -i$ e $r = \sqrt{2}$, a aplicação φ composta com a conjugação usual dos números complexos, chamada de ψ , fornece uma equivalência conforme entre o semi-plano $\mathbb{H}^2 = \{\text{Im } z > 0\}$ e o disco unitário aberto $\mathcal{D} = \{|z| < 1\}$. O que você pode dizer da imagem por ψ de cada semi-reta vertical em \mathbb{H}^2 e de cada semi-círculo em \mathbb{H}^2 ortogonal a $\{\text{Im } z = 0\}$?
- 2)
- a) Verifique que $\forall \alpha \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$f(z) = \frac{z - \alpha}{z + \alpha}$$

determina uma transformação conforme satisfazendo $f(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$, de maneira que $f(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$, se $\alpha > 0$ e $f(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_-$, se $\alpha < 0$.

- b) Verifique que uma família de transformações conformes do disco aberto $|z| < r_1$ sobre o disco aberto $|z| < r_2$ é dada por

$$f(z) = cr_2 \cdot \frac{z - \alpha r_1}{r_1 - \bar{\alpha}z}$$

- onde $|c| = 1, |\alpha| < 1$. Existem outras equivalências conformes entre $|z| < r_1$ e $|z| < r_2$?
- c) Exiba uma família de aplicações de Möbius que são transformações conformes de \mathcal{D} sobre \mathcal{D} . Daí obtenha uma família de equivalências conformes entre \mathcal{D} e $\{z \in \mathbb{C}_\infty, |z| > 1\}$. Idem entre \mathcal{H} e $\{z \in \mathbb{C}_\infty, |z| > 1\}$, levando em conta o conhecimento dado em aula de uma equivalência conforme entre \mathcal{H} e \mathcal{D} . Você terá obtido em cada caso *todas* as transformações conformes ?
- d) Dê uma família de transformações conformes do semi-plano $\Re z > 0$ sobre si mesmo. Idem para transformações conformes de $\Re z > 0$ sobre \mathcal{D} . Mostre que no primeiro problema basta conhecer uma família de transformações conformes de \mathcal{H} sobre si mesmo. Quanto ao segundo problema, que conhecimento adquirido em aula que é suficiente para resolvê-lo ?
- 3) Mostre que a transformação $f(z) = z/(z + 1)$ dá uma equivalência conforme entre o primeiro quadrante $\Re z > 0, \text{Im } z > 0$ e o semi-disco aberto $\{w, \text{Im } w > 0, |w - 1/2| < 1/2\}$.
- 4) Sejam p, q pontos no plano complexo $p \neq q$. Considere

$$f(z) = \frac{z - p}{z - q}, \quad \Gamma_k = \left\{ z, \left| \frac{z - p}{z - q} \right| = k \right\}, \quad k > 0$$

Fazendo desenhos responda as seguintes questões:

- a) Se $\widetilde{\Gamma}_k = f(\Gamma_k)$, $\Rightarrow \widetilde{\Gamma}_k = \{w, |w| = k\}$.
- b) A aplicação inversa g de f é dada por $g(w) = (qw - p)/(w - 1)$.
- c) Como $g(\widetilde{\Gamma}_k) = \Gamma_k$, concluir que Γ_k é um círculo se $k \neq 1$, e Γ_1 é uma reta.
- d) Se Λ 'e um círculo passando por p e q , então $\widetilde{\Lambda} = f(\Lambda)$ é uma reta passando por $w = 0$. A reta Λ_0 passando por p e q dá $f(\Lambda_0) = \mathbb{R}_\infty$.
- e) Se $k \neq 1$, $f^{-1}(\pm k) = g(\pm k)$ determina um diâmetro de Γ_k , daí deduza que o centro z_0 de Γ_k é dado por $1/2\{g(k) + g(-k)\}$ e seu raio R é dado por $1/2|g(k) - g(-k)|$.
- f) Verifique que Γ_1 é uma reta de equação paramétrica $\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}it, t \in \mathbb{R}$, calculando $g(-1)$ e $g(i)$.
- g) Verifique que, se $0 < k < 1$, Γ_k é um círculo contendo p no interior do disco que delimita e se $k > 1$, Γ_k é um círculo contendo q no interior do

disco que delimita. *Sugestão:* Mostre que em cada caso $|p - z_0| = kR$ e $|q - z_0| = R/k$, respectivamente.

Os círculos de equação $|(z - p)/(z - q)| = k$ são chamados de círculos de *Apollonius* determinados por p e q . Os sistemas ortogonais de coordenadas determinados pelos círculos ortogonais Λ e Γ são chamados de círculos de Steiner.

Por quê são ortogonais ?

- 5) Considere a função $w = u + iv = \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$, $z = x + iy$.
- Mostre que a imagem das retas $\{y = y_0 \neq 0\}$ e $\{x = x_0, \sin x_0 \neq 0, \cos x_0 \neq 0\}$ dão elipses e hipérbolas ortogonais e confocais, respectivamente. Observando que $\cos \bar{z} = \overline{\cos z}$, $\cos(-z) = \cos(z)$, estude as imagens das retas quando $y > 0$, $y = 0$, $y < 0$ e $-\pi < x < \pi$.
 - Mostre que $z \mapsto w = \cos z$ leva conformemente a semi-faixa aberta $\{0 < x < \pi, y > 0\}$ sobre o semi-plano inferior $\{\text{Im } z < 0\}$. Mostre ainda que $z \mapsto w = \cos z$ envia conformemente a faixa $0 < x < \pi$ sobre o domínio $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$.
 - Considere $g(w) = \frac{1}{i} \log(w + i\sqrt{1 - w^2})$. Mostre que $1 - w^2 \leq 0 \Leftrightarrow w$ é real e $|w| \geq 1$. Mostre que $w + i\sqrt{1 - w^2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ para $w \in \tilde{\mathbb{C}}$. Conclua que $w \mapsto w + i\sqrt{1 - w^2}$ é holomorfa para $w \in \tilde{\mathbb{C}}$. Mostre que $\arccos x = g(x)$, $\forall x \in (-1, 1)$. Conclua finalmente que a inversa de $z \mapsto \cos z$ (ramo principal de $w = \arccos z$) é dada por $\arccos w = g(w)$, $\forall w \in \tilde{\mathbb{C}}$ e que $\frac{d}{dw}(\arccos w) = -(1 - w^2)^{-1/2}$, $\forall w \in \tilde{\mathbb{C}}$.
- 6) Considere a aplicação f dada por $z \mapsto z^2$.
- Seja H um semi-plano aberto determinado pela reta $e^{i\theta} \mathbb{R}$, para θ real qualquer. Mostre que $f(H) = \mathbb{C} \setminus L$, $L = e^{2i\theta} \mathbb{R}_+$ e que $f : H \rightarrow f(H)$ é uma transformação conforme. Determine a inversa.
 - Seja $w = u + iv = z^2$, $z = x + iy$. Mostre que $u = u_0$ e $v = v_0$ determina duas famílias de hipérbolas ortogonais. Também mostre que $x = x_0$ e $y = y_0$ determina duas famílias de parábolas ortogonais.
 - Mostre que a imagem por f do círculo $S = \{z, |z - 1| = 1\}$ é um cardióide. Mostre que f fornece uma equivalência conforme entre o domínio aberto delimitado pelo cardióide e o disco aberto delimitado por S .

7) Considere a aplicação

$$g(z) = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2$$

a) Mostre que g dá uma equivalência conforme entre o semi-disco aberto $A = \{z, \operatorname{Im} z > 0, |z| < 1\}$ e o semi-plano aberto $\tilde{A} = \{w, \operatorname{Im} w > 0\}$.

8) Elabore um estudo da função $f(w) = \arcsin w$ definida em

$\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$, nos moldes que foi feito no exercício 5) para $\arccos w$, onde f é a inversa da função $z \mapsto \sin z$ restrita à $-\pi/2 < \Re z < \pi/2$ (ramo principal de $w = \arcsin z$). Mostre que $\arcsin w = \frac{1}{i} \log(iw + \sqrt{1-w^2})$, $\forall w \in \tilde{\mathbb{C}}$ e que $\frac{d}{dw}(\arcsin w) = (1-w^2)^{-1/2}$, $\forall w \in \tilde{\mathbb{C}}$.

Sugestão: $\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$.

9) Mostre que $z \mapsto w = \tan z$ envia conformemente a faixa aberta $\{-\pi/2 < \Re z < \pi/2\}$ sobre $\mathbb{C} \setminus \mathcal{L}$, onde $\mathcal{L} = \{it, t \in \mathbb{R}, |t| \geq 1\}$. Mostre que a função inversa (ramo principal de $w = \arctan z$) é dada por $\arctan w = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{i-w}{i+w}\right)$ e que $\frac{d}{dw} \arctan w = \frac{1}{1+w^2}$.

* * *

Os exercícios abaixo são mais difíceis e não devem ser feitos numa primeira leitura.

10) Estude *amplamente* a função de Zhukovsky dada por $f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$,

seguindo as seguintes linhas:

- Mostre que nos abertos contendo $+1$ ou -1 f não pode ser injetiva.
- Mostre que o grau de f é 2. “Quais são os pontos de ramificação de f ?”
- Mostre que f não pode ser injetiva num domínio que contenha z e $1/z$ simultaneamente. Reciprocamente num domínio que contenha no máximo um dos números $z, 1/z$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$), mostre que f restrita a este domínio injetiva. Mostre que f é injetiva nos seguintes domínios: $\mathcal{D} \setminus \{0\}$ $V = \{z; |z| > 1\}$ e \mathbb{H}^2 (Lembremos que \mathcal{D} é a bola unitária aberta e que \mathbb{H}^2 é o semi-plano superior).

- d) Mostre que $f : \mathcal{D} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus L$, onde $L = [-1, 1]$, é uma equivalência conforme. Idem para $f : V \rightarrow \mathbb{C} \setminus L$, onde $L = [-1, 1]$,
- e) Mostre que $f : \mathbb{H}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus S$, onde $S =]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$, é uma equivalência conforme.
- f) Considere $A = \{z; |z + x_0| < 1 + x_0\}$, $B = \{z; |z + x_0| > 1 + x_0\}$ e $C = \{z; |z + x_0| = 1 + x_0\}$, onde $0 < x_0 < 1$. Faça figuras !!
- i) Seja $\tilde{C} = f(C)$. Mostre que \tilde{C} é uma curva simétrica com respeito ao eixo real passando por 1 e cortando ortogonalmente a reta real no ponto $f(-1 - 2x_0)$.
- ii) Mostre que f é injetiva em C e que a curva de Jordan \tilde{C} é regular, exceto no ponto 1. Mostre que \tilde{C} faz um ângulo tipo “quina” em $w = 1$.
- 11) Considere Ω o domínio contido no disco de centro 1 e raio $\sqrt{2}$ satisfazendo $\operatorname{Re} z < 0$ (faça um desenho). O objetivo deste item é determinar a imagem de Ω pela aplicação

$$g(z) = \frac{2z}{1 - z^2}$$

Considere a aplicação

$$f(z) = \frac{1 + z}{1 - z}$$

- a) Estabeleça uma relação funcional entre $f(z)$, $g(z)$ e a aplicação de Cayley $T_C(z)$, definida por $z \mapsto T_C(z) := \frac{z - i}{z + i}$, mostrando que

$$-if^{-1}\left((T_C(z))^2\right) = g(z)$$

Será que $g(z)$ tem alguma simetria ?

- b) Mostre que $g(z)$ dá uma equivalência conforme, levando Ω num certo semi-disco, determinando tal disco.
- c) Fazendo um cálculo simples, independente do item (b) acima, determine o efeito de g no ponto i no que concerne o ângulo, calculando explicitamente o ângulo da imagem de $\partial\Omega$ na imagem de i .
- 12) Seja $f(z) = \frac{(z + 1)^{n/2} - (1 - z)^{n/2}}{(z + 1)^{n/2} + (1 - z)^{n/2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Decompondo $f(z)$ em funções elementares conhecidas neste ponto, mostre que f leva uma certa região circular Ω conformemente sobre o disco unitário. Sendo que Ω está determinada

por dois círculos simétricos em relação ao eixo real, interceptando o eixo real segundo um ângulo π/n .

- 13) Seja f uma função holomorfa em um domínio Ω que seja localmente injetiva (leia-se: f' nunca se anula. Na verdade, esta propriedade é equivalente a ser localmente injetiva, como veremos posteriormente). A *derivada Schwarziana* de f denotada por S_f está definida por

$$S_f := \frac{d}{dz} \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{1}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2$$

- a) Mostre que se $w = T(z)$ e $w = Q(z)$ são uma aplicações de Möbius então

$$S_{T \circ f \circ Q}(z) = S_f(Q(z))Q'(z)^2$$

e assim é invariante por aplicações de Möbius, isto é $S_{T \circ f}(z) = S_f(z)$. Conclua que a derivada Schwarziana de uma aplicação de Möbius é nula. A derivada Schwarziana tem papel importante na Análise Complexa.