INTROD. VCOMPLEXAS- SETEMBRO de 2006–listaH

Professor: Ricardo Sá Earp

INTEGRAÇÃO COMPLEXA E FÓRMULA DE CAUCHY

1) Calcular

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3}\, d\, z$$

quando γ é um círculo orientado positivamente (e simplesmente) dado por

a) $|z| = 1/2$. *Resp*:$2\pi i$

b) $|z-1| = 1/2$. *Resp*:$-i\pi\mathrm{e}$

c) $|z| = 2$. Dê uma fórmula que relacione a integral do item c) com as integrais dos itens a) e b). Justifique sua resposta tanto geometricamente como analiticamente. *Resp*:$i\pi(2-\mathrm{e})$

d) $2\,(\cos\theta)^n + i2\,(\operatorname{sen}\theta)^n\,, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad n \in \mathbb{N}$.

2) Suponha que $f(z)$ seja analítica num aberto contendo a curva fechada γ. Mostre que

$$\int_\gamma \overline{f(z)} f^{'}(z)\, d\, z$$

é um número imaginário puro.

3) Suponha que $f(z)$ seja analítica e que satisfaça $|f(z)-1| < 1$ em um domínio Ω. Mostre que

$$\int_\gamma \frac{f^{'}(z)}{f(z)}\, d\, z = 0,$$

para toda curva fechada, seccionalmente C^1, em Ω.

4) Se $P(z)$ é um polinômio e C denota o círculo $|z-a| = R$, calcule $\int_C P(z)\, d\,\overline{z}$. *Resp*:$-2i\pi R^2 P^{'}(a)$.

5) Seja γ uma curva C^1 por partes e seja $\bar\gamma$ sua imagem obtida pela aplicação $z \to \bar z$. Suponha que $f(z)$ seja uma função contínua sobre γ.

a) Mostre que $z \to \overline{f(\bar z)}$ é contínua sobre $\bar\gamma$ e tem-se que

$$\overline{\int_\gamma f(z)\, d\, z} = \int_{\bar\gamma} \overline{f(\bar z)}\, d\, z = \int_\gamma \overline{f(z)}\, d\, \bar z$$

Se γ é uma curva simples fechada contida no disco aberto unitário $\mathcal{D}$ e $f(z)$ é uma função analítica em $\mathcal{D}$, o que voce pode dizer da integral do meio ? Sempre se anula ? A função$z \to \overline{f(\bar{z})}$ é holomorfa em $\bar{\mathcal{D}}$? Compare com o exercício 1)d) Parte B, Lista 1!

b) Em particular, se γ é o círculo unitário positivamente orientado, mostre que

$$\overline{\int_{|z|=1} f(z)\, d\, z} = -\int_{|z|=1} \overline{f(z)}\, \frac{d\, z}{z^2}$$

Cuidado com a orientação ? Nas duas fórmulas acima o círculo γ está positivamente orientado!!

6) Seja f uma função contínua num domínio Ω. Seja γ uma curva regular (por partes) parametrizada pelo comprimento de arco s, cujo traço esteja contido em Ω. Seja $\boldsymbol{T}$ o vetor velocidade de γ e seja $\boldsymbol{n}$ um dado campo de vetores normal unitário ao longo de γ. Dizemos que o *fluxo* ou campo dado por $z \mapsto f(z)$ (considerando $f(z)$ como um campo de vetores definido em Ω) é nulo (f é então chamado de *fluxless*) se (o símbolo $\cdot$ denota o produto escalar no plano)

$$\int_\gamma f \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$$

para toda curva simples (C^1 por partes) e fechada γ em Ω. Dizemos que o campo que $z \mapsto f(z)$ é conservativo (ou *irrotational*) se

$$\int_\gamma f \cdot \boldsymbol{T}\, \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$$

para toda curva simples (C^1 por partes) e fechada γ em Ω.

a) Mostre que se um fluxo (ou campo) $z \mapsto f(z)$ em um domínio Ω é simultaneamente *fluxless* e *conservativo* então $f(z)$ é uma *função anti-holomorfa* em Ω.

Sugestão: Mostre que

$$\int_\gamma \overline{f(z)}\, \mathrm{d}z = \int_\gamma f \cdot \boldsymbol{T}\, \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{i} \int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

b) Exiba um exemplo de função anti-holomorfa $f(z)$ definida num certo domínio Ω com o campo $z \mapsto f(z)$ não sendo simultaneamente *fluxless* e conservativo.

c) Defina o conceito de um campo ser *localmente fluxless* e o conceito de ser *localmente conservativo* e analise se a recíproca da proposição do item a) é verdadeira neste contexto.

7) Seja $f(z)$ uma função holomorfa em $|z| < R,\ R > 1$. Calcule de duas maneiras distintas as integrais

$$\int_{|z|=1} \left[2 \pm \left(z + \frac{1}{z}\right)\right] \frac{f(z)}{z} d\,z,$$

obtendo as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{i\theta}) \cos^2 \frac{\theta}{2}\, d\,\theta =& 2f(0) + f^{'}(0) \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \sin^2 \frac{\theta}{2}\, d\,\theta =& 2f(0) - f^{'}(0) \end{aligned}$$

8) Mostre que se $f(z)$ é holomorfa em um aberto que contenha o disco fechado $|z| \leqslant 1$ então vale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\bar{f}(z)}{z-a}\, d\,z = \begin{cases} \bar{f}(0) & \text{se } |a| < 1, \\ \bar{f}(0) - \bar{f}(1/\bar{a}) & \text{se } |a| > 1, \end{cases}$$

Sugestão: Use o exercício 5 b) e a fórmula de Cauchy.

9) Verifique que

$$\int_a^b \frac{d\,t}{z - it} = i\{\log(z - ib) - \log(z - ia)\}$$

onde $-\infty < a < b < \infty,\ \Re z > 0$. Conclua que

$$\int_a^b \frac{x\, d\,t}{x^2 + (y-t)^2} = \arctan\left(\frac{y-a}{x}\right) - \arctan\left(\frac{y-b}{x}\right).$$

10) Calcular

a) $\int_\gamma z\, d\,z$

b) $\int_\gamma \bar{z} d\,z$

c) $\int_\gamma \Re z \, d\, z$ onde γ é o caminho poligonal $0 \to (1+i) \to 2$.

11) Calcule a integral $\displaystyle\int_\gamma z^\alpha \, d\, z$, $\alpha \in \mathbb{C}$, nos seguintes casos:

a) γ é o semi-círculo indo de 1 à -1 no semi-plano superior (ou $\operatorname{Im} z \geqslant 0$).

b) γ é o semi-círculo indo de 1 à -1 no semi-plano inferior.

c) γ é o círculo de centro 0 e raio 1. *Resp*: $\dfrac{2i}{\alpha+1}\sin(\alpha+1)\pi$, se $\alpha \neq -1$, $2\pi i$, se $\alpha = -1$. Para qual ramo de z^α vale esta resposta ? Para que valores de α temos o valor 0 ?

12) Mostre com todos os detalhes que

$$\left| \int_\gamma \frac{dz}{z^4+1} \right| \leqslant \frac{2\pi R}{R^4-1}$$

onde γ é o círculo $|z| = R,\ R > 1$.

13) Sabendo-se que $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$, se γ é uma curva simples fechada positivamente orientada (e portanto de índice 1) verifique às seguintes fórmulas

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$,
onde o traço de γ é a elipse de equação $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t \cos^2 t}{\cos^6 t + \sin^6 t} dt = \frac{2\pi}{3}$
onde γ descreve o astróide dado por $t \mapsto \cos^3 t + i \sin^3 t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

15) Calcule

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)(z-1/a)}, \qquad a \neq 0,\ |a| \neq 1.$$

Use o resultado acima para calcular

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a\cos t + a^2}.$$