LISTA 1 DE INTROD À TOPOLOGIA 2011

RICARDO SA EARP

Espaços vetoriais normados: Exemplos de espaços de Banach e de Hilbert

(1) Seja E um espaço vetorial normado com norma $\|\|$. Deduza que $\|\| : E \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

(2) Sejam $E_1, \dots, E_n$ espaços vetoriais normados cujas normas são $\|\|_1, \dots, \|\|_n$, respectivamente.
Seja $E := E_1 \times \cdots \times E_n$ o espaço produto.
  (a) Para cada $v = (v_1, \dots, v_n) \in E$ definimos $\|v\|_\infty := \max\{\|v_1\|, \dots, \|v_n\|\}$. Deduza que $(E, \|\|_\infty)$ é um espaço vetorial normado. Note que $(E, \|\|_\infty)$ é um espaço de Banach, se e só se cada $(E_i, \|\|_i)$ é um espaço de Banach.
  (b) Para cada $v = (v_1, \dots, v_n) \in E$ definimos $\|v\|_1 := \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|_i$. Deduza que $(E, \|\|_1)$ é um espaço vetorial normado.
  (c) Para cada $v = (v_1, \dots, v_n) \in E$ definimos $\|v\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|_i^2\right)^{1/2}$. Deduza que $(E, \|\|_2)$ é um espaço vetorial normado.

(3) Seja E um espaço vetorial e sejam $\|\|_1$ e $\|\|_2$ duas normas em E e escrevemos $E_1 = (E, \|\|_1)$ e $E_2 = (E, \|\|_2)$. Dizemos que $\|\|_1$ " é mais fina" que $\|\|_2$, se existe uma constante positiva $c > 0$, tal que $\|x\|_2 \leqslant c\|x\|_1$, $\forall x \in E$.
  (a) Deduza que a *topologia* em $E_1 = (E, \|\|_1)$ é mais fina que a *topologia* em $E_2 = (E, \|\|_2)$, ou seja se $U \subset E$ é um aberto de E_2 então U é também um aberto de E_1.
  (b) Seja $\{x_n\}$ uma sequência em E e seja $x \in E$. Deduza que se $x_n \to x$ em E_1 então $x_n \to x$ em E_2. Em particular, deduza que se uma sequência $\{x_n\}$ tem norma em E_1 arbitrariamente pequena para n suficientemente grande, então também tem norma em E_2 abitrariamente pequena para n suficientemente grande.
  (c) Deduza que a aplicação identidade $\mathrm{Id} : E_1 = (E, \|\|_1) \to E_2 = (E, \|\|_2)$ é contínua.

(4) Seja $C^0[a, b]$ o conjunto das funções contínuas reais definidas no intervalo fechado $[a, b]$. Seja $f \in C^0[a, b]$. Considere $\|f\|_\infty :=$

$\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|$. Considere também $\|f\|_1 = \int\limits_a^b |f(x)|dx$. Finalmente considere $\|f\|_2 = \left(\int\limits_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$.

(a) Deduza que $(C^0[a,b], \|\|_\infty)$ é um espaço vetorial normado ("espaço de Banach").
(b) Deduza que $(C^0[a,b], \|\|_1)$ é um espaço vetorial normado ("espaço de Banach").
(c) Deduza que $(C^0[a,b], \|\|_2)$ é um espaço vetorial normado cuja norma é proveniente de um produto interno ("espaço de Hilbert").
(d) Deduza que a norma $\|\|_\infty$ mais fina que a norma $\|\|_1$, mais que $\|\|_1$ *não é mais fina do que* $\|\|_\infty$.
(e) Deduza que a norma $\|\|_\infty$ mais fina que a norma $\|\|_2$, mais que $\|\|_2$ *não é mais fina do que* $\|\|_\infty$.
(f) Deduza que a norma $\|\|_2$ mais fina que a norma $\|\|_1$, mais que $\|\|_1$ *não é mais fina do que* $\|\|_2$.

(5) Seja $C^1[a,b]$ o conjunto de todas as funções $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que possuem derivadas contínuas em todos os pontos. Defina $\|f\|_1 = \sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)| + \sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f'(x)|$.
(a) Deduza que $(C^1[a,b], \|\|_1)$ é um espaço vetorial normado ("espaço de Banach").
(b) Generalize esta definição de espaço considerando o conjunto de todas as funções $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que possuem derivadas de ordem k contínuas.

(6) Considere $(E, \|\|_E)$ e $(F, \|\|_F)$ espaços vetoriais normados (que, possivelmente, têm dimensão infinita). Deduza que as afirmações abaixo sobre uma transformação (operador) linear $T : E \to F$ são equivalentes.
(a) $T : E \to F$ é contínua; isto é, fixado $a \in E$ qualquer, segue então que, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que
$\|x - a\|_E < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(a)\|_F < \varepsilon$.
(b) T é contínua em $0 \in E$.
(c) Existe $c > 0$ tal que $\|T(x)\|_F \leqslant c\|x\|_E$, $\forall x \in E$.
(d) Existe $c > 0$ tal que $\|T(x-y)\|_F \leqslant c\|x-y\|_E$, $\forall x, y \in E$.

(7) Assuma que $T : E \to F$ é linear, injetora e sobrejetora. Deduza que $T : E \to F$ é um *homeomorfismo*, se existem constantes $a > 0$ e $b > 0$ tal que $a\|x\|_E \leqslant \|T(x)\|_F \leqslant b\|x\|_E$.

OBS: *Se E e F são espaços de Banach e T é um operador linear contínuo e sobrejetivo de E em F então T é uma aplicação* *aberta: T leva abertos de E em abertos de F (Este é o "teorema da aplicação aberta da Análise Funcional").*

(8) Assumindo que E e F são espaços de Banach deduza que se $T : E \to F$ é linear, injetora e sobrejetora então T^{-1} é contínua de F sobre E.

(9) Considere $(E, \langle , \rangle)$ um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle , \rangle$. Deduza que o produto interno $\langle , \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

(10) Dê exemplo de um conjunto ortonormal infinito em ℓ^2.

(11) Seja $C^0[0, 2\pi]$ o espaço das funções contínuas com a norma $\|f\|_2^2 = \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$. Considere o conjunto $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \ldots$. Deduza que S é ortonormal.

(12) Seja S um conjunto ortonormal de um espaço um espaço vetorial E munido de um produto interno $\langle , \rangle$. Deduza que cada par de elementos distintos de S estão a uma distância igual a $\sqrt{2}$.

(13) Considere $(E, \langle , \rangle)$ um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle , \rangle$. Seja $S \subset$ um conjunto ortonormal de E.

(a) Seja $u_1, \ldots, u_n$ uma coleção finita de elementos distintos de S. Seja $x \in E$. Deduza que

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle x, u_i \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2 \qquad \text{(desigualdade de Bessel)}$$

Sugestão: Considere o vetor $x - \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i$.

(b) Seja $x \in E$. Deduza que o conjunto dos pontos $u \in S$ tal que $\langle x, u \rangle \neq 0$ é finito ou enumerável.
Sugestão: Dado $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto dos pontos $u \in S$ tal que $|\langle x, u \rangle| \geqslant \frac{1}{n}$.

(c) Sejam x, y pontos de E. Deduza que

$$\sum_{u \in S} |\langle x, u \rangle \langle y, u \rangle| \leqslant \|x\| \|y\|$$

(14) Seja E um espaço vetorial espaço vetorial munido de um produto interno $\langle , \rangle$. Vamos assumir que E seja completo (quando E não tem dimensão finita E é chamado de "espaço de Hilbert"). Seja $\{u_n, n = 1, \ldots\}$ um conjunto ortonormal de E infinito e enumerável.

(a) Deduza que a série $\sum_{i=1}^{\infty} c_n u_n$ é convergente se e só se $\sum_{i=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$. Neste caso, seja $x := \sum_{i=1}^{\infty} c_n u_n$. Deduza a seguinte relação: $c_n = \langle x, u_n \rangle$.
Sugestão: Considere a sequência das somas parciais em E, dada por $s_n = \sum_{i=1}^{n} c_n u_n$, mostrando que esta é uma sequência de Cauchy, se e só se $\sum_{i=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$. Em seguida, prove que $c_i = \langle s_n, u_i \rangle$ e use a continuidade do produto interno.