

LISTA 2 DE INTROD À TOPOLOGIA 2011

RICARDO SA EARP

Espaços métricos e espaços topológicos

- (1) Seja (M, d) um espaço métrico de diâmetro ∞ . Deduza que $d_1(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$ e $d_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ são métricas em M que determinam a mesma topologia que a métrica d .
Todavia, mostre que tais métricas não são equivalentes a d .
- (2) Sejam X_1, \dots, X_n espaços topológicos metrizáveis. Deduza que o produto $X := X_1 \times \dots \times X_n$ é metrizável e exiba uma base de X .
- (3) Seja X um espaço topológicos e sejam A, B , subconjuntos de X . Responda verdadeiro ou falso. Caso verdadeiro, deduza, caso falso dê um contraexemplo.
- (a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
 - (b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
 - (c) $\overline{A^\circ} = \overline{A}$.
 - (d) Se $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$, então $A \cap B \neq \emptyset$.
- (4) Sejam A e B dois subconjuntos de um espaço topológico X . Mostre que para o subconjunto $A \times B$ de $X \times X$ (produto cartesiano), valem as seguintes propriedades:

$$(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ, \quad \overline{(A \times B)} = \overline{A} \times \overline{B}$$

$$\partial(A \times B) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B)$$

- (5) Seja X um espaço topológico e seja A um subconjunto de X . Deduza que a aderência \overline{A} de A é a união de A com o conjunto dos pontos de acumulação de A .
- (6) Deduza que um conjunto finito num espaço topológico de Hausdorff é fechado.
- (7) Deduza que num espaço topológico de Hausdorff X , se um ponto $x \in X$ é um ponto de acumulação de $A \subset X$, então toda vizinhança aberta de x contém uma infinidade de pontos de A .
- (8) Seja X um espaço topológico de Hausdorff. Deduza que a diagonal $D := \{(x, x), x \in X\}$ é um conjunto fechado no espaço produto $X \times X$.

(9) Seja

$$f(x) = \begin{cases} x \cot x & \text{se } 0 < |x| < \pi \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

- (a) Deduza que o gráfico de f é fechado.
 (b) Deduza que o gráfico de f é completo.
 (c) seja $X : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $X(t) = (t, f(t))$. Deduza que se $\{x_n\}$ é uma sequência de números reais, satisfazendo $|x_n| < \pi$, e $|x_n| \rightarrow \pi$, ($n \rightarrow \infty$), então $\|X(x_n)\| \rightarrow \infty$. Conclua que se $\{x_n\}$ é uma sequência satisfazendo $|x_n| < \pi$, que “sai” de todo compacto (de $(-\pi, \pi)$) então $X(x_n)$ não possui valores aderentes em \mathbb{R}^2 , dizemos que X é uma *aplicação própria*.
- (10) Seja (X, d) um espaço métrico. Deduza que dado $x_0 \in X$, a função distância $d(x_0, x) := \text{dist}(x_0, x)$ é uma função contínua de $x \in X$. Deduza que $d(x, y)$ é uma função contínua de ambos x e y .
- (11) Deduza que num espaço métrico X um conjunto F é fechado se e só se para toda sequência x_n convergente de pontos de F , convergindo a $x \in X$, então $x \in F$.
- (12) Seja (X, d) um espaço métrico munido da distância d . Seja $X_0 \subset X$ um subconjunto de X , considerado como um espaço métrico em si mesmo, i.e $X_0 = (X_0, d)$. Deduza que se X é completo e se X_0 é fechado em X , então (X_0, d) também é completo.
- (13) Deduza que um conjunto compacto K de um espaço métrico (X, d) é fechado e limitado.
 Deduza também que K é completo.
- (14) Seja X um espaço métrico e seja $S \subset X$ conjunto. Dizemos que um ponto $x \in X$ é um *ponto de acumulação* do conjunto S , se cada vizinhança de x (i.e aberto que contém x), contém um ponto de S diferente de x .
 Deduza que x é um ponto de acumulação de S , se e só se existe uma sequência convergente $\{x_n\}$ de pontos distintos de S que tem x como limite.
- (15) Seja $\{K_\alpha\}_{\mathcal{A}}$ uma coleção de conjuntos compactos de um espaço topológico X . Deduza que se a interseção de cada subcoleção finita de $\{K_\alpha\}_{\mathcal{A}}$ é não vazia então $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} K_\alpha \neq \emptyset$.
- (16) Seja X um espaço métrico completo. Dizemos que um conjunto $S \subset X$ tem diâmetro finito se a função $d : S \times S \rightarrow \text{dist}(x, y)$ é

limitada para todo $x, y \in S$. Denotamos o $\sup\{d(x, y), x, y \in S\}$ por $\text{diam}(S)$, chamado de diâmetro de S .

(a) Se $S \subset X$, deduza que $\text{diam}(S) = \text{diam}(\overline{S})$.

(b) Suponha que $\{S_n\}$ é uma sequência de conjuntos fechados limitados, não vazios tal que $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \cdots$. Suponha que o diâmetro $\text{diam}(S_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Deduza que a interseção $\cap S_n$ de todos os conjuntos S_n não é vazia.

Dê um contraexemplo, se a hipótese $\text{diam}(S_n) \rightarrow 0$, não é satisfeita.

(c) Seja K_n uma sequência de subconjuntos compactos de X , $n = 1, 2, \dots$. Assuma que $K_n \supset K_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$ e que $\text{diam}(K_n) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Deduza que $\cap_n K_n$ consiste em um único ponto.

(17) Sejam S_1 e S_2 dois subconjuntos de um espaço métrico (X, d) .

(a) Defina $d(S_1, S_2)$.

(b) Se S_1 e S_2 são fechados disjuntos i.e $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, tal que $\forall p \in S_2, \text{dist}(p, S_1) > 0$, será que $\text{dist}(S_1, S_2) > 0$?

(c) Se S_1 é compacto e S_2 é fechado, sendo S_1 e S_2 disjuntos, tal que $\forall p \in S_2, \text{dist}(p, S_1) > 0$, será que $\text{dist}(S_1, S_2) > 0$?