LISTA 3 DE INTRODUÇÃO À TOPOLOGIA 2011

RICARDO SA EARP

Limites e continuidade em espaços topológicos

(1) (a) Assuma que $Y = A \cup B$, onde A e B são subconjuntos abertos disjuntos não vazios. Deduza que $\overline{A} \cap B = \emptyset$ e que $\overline{B} \cap A = \emptyset$, ou seja nenhum destes dois subconjuntos contém valores aderentes do outro.
Sugestão: Deduza que $A = \overline{A} \cap Y$, concluindo que $\overline{A} \cap B = \emptyset$.
(b) Reciprocamente, deduza que se $Y = A \cup B$, onde A e B são subconjuntos disjuntos não vazios, tal que $\overline{A} \cap B = \emptyset$ e que $\overline{B} \cap A = \emptyset$. Deduza que A e B são abertos em Y.

(2) Seja $f : X \to Y$ uma função contínua de uma espaço topológico X num espaço topológico Y. Seja $A \subset X$. Deduza que a restrição de f à A é contínua (munindo, é claro, A com a topologia induzida).

(3) Sejam X e Y espaços topológicos. Assuma que $X = A \cup B$, onde A e B são fechados em X. Sejam $f : A \to Y$ e $g : B \to Y$ duas funções contínuas tais que $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A \cap B$. Mostre que a função $h : X \to Y$ dada por $h(x) = f(x), x \in A$ e $h(x) = g(x), x \in B$ é contínua.

(4) Sejam f, g funções contínuas que levam um espaço topológico X na reta real $\mathbb{R}$. Se $f(a) \neq 0 \neq g(a)$, para certo $a \in X$, segue então que $f(x) \cdot g(x) \neq 0$, numa vizinhança de a.

(5) Seja $f(x) = v \cdot x$, onde $\cdot$ denota o produto escalar em $\mathbb{R}^n$, e $v \in \mathbb{R}^n$ é um vetor fixado. Discuta a continuidade de $f(x)$. Mostre que os semi-planos dados pelas equações

$$\{x; v \cdot x > \alpha\} \qquad \text{e} \qquad \{x; v \cdot x \geqslant \alpha\}$$

são subconjuntos abertos e fechados, respectivamente. Deduzir que o hiperplano $\{x; v \cdot x = \alpha\}$, é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$.

(6) Mostre que se f, g são funções contínuas que levam um espaço topológico X em $\mathbb{R}^n$, então se $f(a) \neq g(a)$, para certo $a \in X$, segue-se que $f(x) \neq g(x)$, numa vizinhança de a.

(7) Dizemos que uma aplicação f que leva um espaço topológico X num espaço topológico Y é *aberta* (resp. *fechada*), se a imagem

por f de uma aberto de X (resp. fechado) é um aberto de Y (resp. fechado).

(a) Dê exemplos de aplicações contínuas reais definidas em subconjuntos do espaço Euclideano que sejam abertas, mas não sejam fechadas.

(b) Dê exemplos de aplicações contínuas definidas de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ que não sejam nem abertas nem fechadas.

(c) Dê exemplos de aplicações contínuas f definidas num intervalo I da reta em $\mathbb{R}^2$ que sejam injetivas mas não produzem um homeomorfismo entre I e sua imagem $f(I)$.

(d) Sejam X_1 e Y_1 subconjuntos de X e Y, respectivamente. Seja $f : X_1 \to X_2$ uma função contínua bijetiva tal que para todo aberto A de X (com a topologia induzida), $f(A)$ é um aberto de Y_1 (com a topologia induzida). Mostre que f é um homeomorfismo.

(8) Dê exemplos de funções definidas numa vizinhança perfurada da origem de $\mathbb{R}^2$ que admitem um mesmo limite quando $(x, y) \to (0, 0)$, ao longo de raios que chegam a origem $(0, 0)$ de $\mathbb{R}^2$, mas que não admitam uma extensão contínua à origem.

(9) Responda verdadeiro ou falso. Caso verdadeiro, deduza, caso falso dê um contraexemplo. Lembro que uma propriedade importante de funções contínuas é o seguinte: Um função contínua num espaço compacto assume o máximo e o mínimo.

(a) Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função considere o gráfico de f dado por $A = \{(x, f(x)),\, x \in \mathbb{R}\}$. Segue então que se o gráfico de f é fechado, f é contínua.

(b) Seja $f : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ contínua tal que $f(0) = 1/2$ e $f(x) \to 1$ quando $\|x\| \to \infty$. Segue então que f é limitada e assume um máximo global.

(c) Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e seja $a \in \overline{X}$ um valor aderente a X. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua limitada. Segue então que existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

(10) Exiba um homeomorfismo entre o intervalo $(-1, 1)$ e a reta real $\mathbb{R}$.

(11) Considere a esfera unitária $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Seja $N = (0, 0, 1)$ o polo norte da esfera. Para cada $p \in \mathbb{S}^2$, $p \neq N$, trace a reta r passando por N e p. Seja $f(p)$ o ponto que r corta ou perfura o plano horizontal $\{z = 0\}$. Deduza que a aplicação $p \mapsto f(p)$ é um homeomorfismo, que leva $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ homeomorficamente a $\mathbb{R}^2$.

(12) No plano yz, no espaço $\mathbb{R}^3$, considere o círculo C de centro $(0, a, 0)$ e de raio $r > 0$, dado por $z^2 + (y - a)^2 = r^2$, $x = 0$ onde $0 < r < a$.
  (a) Obtenha a superfície S de revolução fazendo girar o círculo C em torno do eixo z. Exiba parametrizações desta superfície.
  (b) Deduza que S é homeomorfa ao toro $S^1 \times S^1$.
  (c) Escreva S na forma implícita $f(x, y, z) = 0$, encontando esta função $f(x, y, z)$.

(13) Seja S o cilindro em $\mathbb{R}^3$ dado por $x^2 + y^2 = 1$. Deduza que S é homeomorfo aos seguintes conjuntos:
  (a) Disco perfurado em $\mathbb{R}^2$ dado por $0 < x^2 + y^2 < 1$.
  (b) Anel em $\mathbb{R}^2$ dado por $1 < x^2 + y^2 < 2$.
  (c) Plano perfurado em $\mathbb{R}^2$ dado por $x^2 + y^2 > 0$.
  (d) Esfera $\mathbb{S}^2$ em $\mathbb{R}^3$, com dois pontos removidos dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 > 0$.
  (e) O espaço quociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$, munido da topologia quociente, fazendo a identificação em $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ de $z \in \mathbb{C}$ com $z + n$, $n \in \mathbb{Z}$.

(14) Deduza as afirmações abaixo:
  (a) Seja A um conjunto limitado não compacto de $\mathbb{R}$. Segue então que existe uma função contínua $f : A \to \mathbb{R}$ que não é limitada e existe $g : A \to \mathbb{R}$ limitada, mas o $\sup_x f(x)$ não é atingido.
  (b) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ contínua tal que $f(x) \to 0$ quando $\|x\| \to \infty$. Segue então que f assume um máximo global.
  (c) Todo conjunto infinito limitado de $\mathbb{R}^n$ possui um ponto de acumulação.
  (d) Toda sequência limitada de $\mathbb{R}^n$ possui um valor aderente.
  (e) Seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada em $\mathbb{R}^N$ tal que toda subsequência converge para o mesmo ponto a de $\mathbb{R}^N$. Segue então que $x_n \to a$, quando $n \to \infty$.

(15) Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$. Definimos:
$$f(x) := \operatorname{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|, \quad x \in \mathbb{R}^n$$
que se chama de distância de x ao conjunto A. Deduza:
  (a) f é Lipschitz, logo uniformemente contínua em $\mathbb{R}^n$.
  (b) Dê uma caracterização da aderência $\overline{A}$ de A em termos de $f(x)$.
  (c) Deduza que para $t > 0$ o conjunto $V_t(A) = \{x; \operatorname{dist}(x, A) < t\}$ é uma vizinhança de A e de $\overline{A}$.

(d) Dados dois conjuntos A, B de $\mathbb{R}^n$ defina $\text{dist}(A, B)$, a distância de A a B. Conclua que se A é compacto e B é fechado e $A \cap B = \emptyset$, então $\text{dist}(A, B) > 0$. Mostre ainda que isto é falso se A e B forem apenas fechados.

(16) (a) Deduza que $f(x) = \sqrt{x}$ é Lipschitz para $x \geqslant a > 0$ e uniformente contínua, mas não Lipschitz em $[0, \infty)$.

(b) Estenda o que foi feito no item anterior para a função $f(x) = x^{1/p}, x \geqslant 0, p \in \mathbb{Z}^+$.

(c) Dê exemplos de funções reais elementares, definidas num intervalo da reta que sejam α-Hölder continuas com expoente de Hölder $\alpha = 1/2$, mas que não sejam α-Hölder continuas para $\alpha < 1/2$.

(d) Deduza que $f(x) = |x|^{1/n}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ é α-Hölder continua com expoente de Hölder $\alpha = 1/n$.

(e) (i) Sejam $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Deduza que se $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ e $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ são duas funções α-Hölder continua e β-Hölder continua, respectivamente, então o produto fg também é Hölder contínua, explicitando o expoente de Hölder do produto.

(ii) Deduza que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ são duas funções α-Hölder continua e β-Hölder continua, respectivamente, então a composta $f \circ g$ é $\alpha\beta$-Hölder contínua.

(f) Seja X um subconjunto da reta real $\mathbb{R}$. Seja $f : X \to \mathbb{R}$, uma aplicação uniformemente contínua. Deduza que se a é um valor aderente a X, então limite $\lim_{x \to a} f(x)$, existe. Conclua que toda aplicação uniformente contínua $f : X \to \mathbb{R}$, admite uma única extensão contínua $F : \overline{X} \to \mathbb{R}$, (i. e, $F|_X = f$, F restrita a X é igual à f) que é uniformemente contínua. Além disso, conclua que se X é limitado, então $f(X)$ é limitado.

(g) Dê exemplos de funções contínuas definidas em $(0, 1]$ que não são uniformente contínuas.

(h) Estabeleça um critério usando sequências para que uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *não seja uniformente contínua.* Aplique para deduzir que $f(x) = x^3$ não é uniformemente em $\mathbb{R}$.

(17) Seja X um subconjunto de um espaço métrico Z. Seja $f : X \to \mathbb{R}$, uma aplicação uniformemente contínua. Deduza que se a é um valor aderente a $X \subset Z$ (imagine X contido num espaço métrico ambiente Z, digamos $Z = \mathbb{R}^n$), então limite $\lim_{x \to a} f(x)$, existe. Conclua que toda aplicação uniformemente

contínua $f : X \to \mathbb{R}$, admite uma única extensão contínua $F : \overline{X} \to \mathbb{R}$, que é além disso uniformemente contínua.

(18) Generalize o item anterior para uma aplicação uniformemente contínua $f : X \subset Z \to Y$, de um espaço métrico $X \subset Z$ num espaço métrico completo Y.

(19) Exiba um recobrimento explícito do plano complexo $\mathbb{C}$ no plano perfurado $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tente dar um recobrimento conforme (i.e que preserva ângulos).

(20) Exiba um recobrimento explícito do disco aberto $\mathcal{D}$ de raio 1, i.e $\mathcal{D} = \{z, |z| < 1\}$, no disco perfurado $\mathcal{D} \setminus \{0\}$. Tente dar um recobrimento conforme (i.e que preserva ângulos).

(21) Exiba um recobrimento explícito do disco aberto $\mathcal{D}$ de raio 1 no anel $0 < |z| < 2$. Tente dar um recobrimento conforme (i.e que preserva ângulos).

(22) Exiba um recobrimento de $\mathbb{R}^n$ no toro $\mathbb{T}^n$.

(23) Vamos desenvolver o seguinte exercício da Lista 1:

Considere $(E, \|\|_E)$ e $(F, \|\|_F)$ espaços vetoriais normados (que, possivelmente, têm dimensão infinita). Deduza que as afirmações abaixo sobre uma transformação (operador) linear $T : E \to F$ são equivalentes.

(a) $T : E \to F$ é contínua; isto é, fixado $a \in E$ qualquer, segue então que, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $\|x - a\|_E < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(a)\|_F < \varepsilon$.

(b) T é contínua em $0 \in E$.

(c) Existe $c > 0$ tal que $\|T(x)\|_F \leqslant c\|x\|_E$, $\forall x \in E$.

(d) Existe $c > 0$ tal que $\|T(x - y)\|_F \leqslant c\|x - y\|_E$, $\forall x, y \in E$.

(e) Assuma que $T : E \to F$ é linear, injetora e sobrejetora. Deduza que $T : E \to F$ é um *homeomorfismo*, se existem constantes $a > 0$ e $b > 0$ tal que $a\|x\|_E \leqslant \|T(x)\|_F \leqslant b\|x\|_E$.

OBS: *Se E e F são espaços de Banach e T é um operador linear contínuo e sobrejetivo de E em F então T é uma aplicação aberta: T leva abertos de E em abertos de F (Este é o "teorema da aplicação aberta da Análise Funcional").*

(f) Assumindo que E e F são espaços de Banach deduza que se $T : E \to F$ é linear, injetora e sobrejetora então T^{-1} é contínua de F sobre E.

Seja $\mathcal{L}(E, F) := \{T : E \to F\}$ linear e contínua. Coloquemos: $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|T\|_\infty := \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|T(x)\|_F$.

(g) Deduza que de fato $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ é uma norma em $\mathcal{L}(E,F)$.
(h) Deduza que $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ é a menor constante $c \geqslant 0$ tal que $\|T(x)\|_F \leqslant c\|x\|_E, \forall x \in E$.
(i) Deduza que se F é um espaço de Banach então $\mathcal{L}(E,F)$ é um espaço de Banach.

(24) Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$. Seja $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, uma aplicação contínua, com f restrita à Ω injetora. Deduza que $f(\partial\Omega) = \partial f(\Omega)$.

(25) Deduza o mesmo resultado, quando Ω não é limitado, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua, com f restrita à Ω injetora, e com a hipótese adicional de $|f(x)| \to \infty$, sempre que $|x| \to \infty$,

(26) Deduza que um aplicação própria $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que é um homeomorfismo local é um homeomorfismo global. Este resultado é chamado de teorema de Hadamard. Generalize: Assuma que X é um espaço métrico conexo e que Y é um espaço métrico simplesmente conexo. Deduza que todo homeomorfismo local próprio $f : X \to Y$ é um homeomorfismo global.

(27) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável tal que $|g'(x)| \leqslant c$, onde c é uma constante satisfazendo $0 < c < 1$.
(a) Deduza que o gráfico de g corta a reta $y = x$ num único ponto.
(b) Deduza que a aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := x + g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ produz um homeomorfismo de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$.

(28) Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável tal que todas as derivadas parciais satisfazem $|\partial^i g/\partial x_j| \leqslant c < 1/n, c > 0$ em $\mathbb{R}^n$. Deduza que a aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) := x + g(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$ produz um homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$.

(29) Sejam G e H grupos topológicos. Seja $f : G \to H$ um homomorfismo contínuo sobrejetivo. Assuma que f seja um homeomorfismo local. Deduza que f é uma aplicação de recobrimento.

(30) Considere o sistema

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{2}\sin x \cos y = 0 \\ y + \frac{1}{2}\sin y \cos x = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Deduza que o sistema (1) tem uma única solução.
(b) Use o MAPLE e o método das aproximações sucessivas para encontrar uma aproximação da solução.

(31) Considere o sistema

$$
\begin{aligned}
x - \frac{1}{2}\sin(x+y) &= 0\\
y - \frac{1}{2}\cos(x-y) &= 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

(a) Deduza que o sistema (2) tem uma única solução.
(b) Use o MAPLE e o método das aproximações sucessivas para encontrar uma aproximação da solução.