

LISTA 4 DE INTROD À TOPOLOGIA 2011

RICARDO SA EARP

Compacidade, conexidade e continuidade em espaços topológicos

- (1) Seja C um subconjunto fechado da reta. Seja $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Deduza que f admite uma extensão contínua $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F|_C = f$. Investigue se este resultado faz parte de um resultado de extensão mais geral.
- (2) Deduza que num espaço topológico compacto, todo conjunto infinito possui um ponto de acumulação.
- (3) Seja $C([0, 1])$ o conjunto das funções reais contínuas, munido da norma do sup. Encontre uma sequência $\{f_n\}$ em $C([0, 1])$, satisfazendo $\|f_n\|_\infty = 1$ e $\|f_n - f_m\|_\infty = 1$ se $m \neq n$. Deduza que a bola fechada de raio 1 em $C([0, 1])$, não é compacta.
- (4) Seja X um espaço topológico normal. Deduza que dados um fechado F em X e um aberto A com $F \subset A$, existe um aberto U em X tal que $F \subset U$ e $\bar{U} \subset A$.
- (5) Seja X um espaço topológico de Hausdorff compacto.
 - (a) Dado um subconjunto fechado F de X e um ponto $y \notin F$, deduza que existe um aberto U contendo F e um aberto V contendo y , com $U \cap V = \emptyset$. Dizemos que X é regular.
 - (b) Deduza que X é normal.
 - (c) Deduza que dados um fechado F em X e um aberto A com $F \subset A$, existe um aberto U em X tal que $F \subset U$ e $\bar{U} \subset A$.
- (6) Dizemos que um espaço de Hausdorff X é localmente compacto, se cada ponto x de X possui uma vizinhança (aberta) relativamente compacta V , isto é \bar{V} é compacta.

Assuma que a condição de ser localmente compacto seja equivalente à seguinte condição:

Para cada compacto $C \subset X$, e para cada aberto $U \supset C$, existe um aberto relativamente compacto V , tal que $C \subset V \subset \bar{V} \subset U$.

- (a) Assuma que X é um espaço localmente compacto, tal que $X = \cup_{i=1}^n C_i$, onde C_i é compacto, $i = 1, 2, \dots$. Deduza que $X = \cup_{i=1}^n U_i$, onde cada U_i é um aberto relativamente

compacto satisfazendo $\overline{U_i} \subset U_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$. Tal família $\{U_i\}$ se chamam uma exaustão de X .

- (7) Deduza as afirmações abaixo:
- Seja A um conjunto limitado não compacto de \mathbb{R} . Segue então que existe uma função contínua $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ que não é limitada e existe $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ limitada, mas o $\sup_x g(x)$ não é atingido.
 - Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ contínua tal que $f(x) \rightarrow 0$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$. Segue então que f assume um máximo global.
 - Todo conjunto infinito limitado de \mathbb{R}^n possui um ponto de acumulação.
 - Toda sequência limitada de \mathbb{R}^n possui um valor aderente.
 - Seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada em \mathbb{R}^N tal que toda subsequência converge para o mesmo ponto a de \mathbb{R}^N . Segue então que $x_n \rightarrow a$, quando $n \rightarrow \infty$.
- (8) Seja A um subconjunto não vazio de um espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|)$. Definimos:
- $$f(x) := \text{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|, \quad x \in E$$
- que se chama de distância de x ao conjunto A . Deduza:
- f é Lipschitz, logo uniformemente contínua em \mathbb{R}^n .
 - Dê uma caracterização da aderência \overline{A} de A em termos de $f(x)$.
 - Deduza que para $t > 0$ o conjunto $V_t(A) = \{x; \text{dist}(x, A) < t\}$ é uma vizinhança de A e de \overline{A} .
 - Dados dois conjuntos A, B de E defina $\text{dist}(A, B)$, a distância de A a B . Conclua que se A é compacto e B é fechado e $A \cap B = \emptyset$, então $\text{dist}(A, B) > 0$. Mostre ainda que isto é falso se A e B forem apenas fechados.
- (9) Deduza que a esfera unitária $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$ em \mathbb{R}^{n+1} é um conjunto conexo. Seja $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Deduza que existe $p \in \mathbb{S}^n$; $f(p) = f(-p)$.
- (10) Sejam $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas, satisfazendo $f(0) < g(0)$. Exiba condições suficientes para que exista um ponto $y > 0$, tal que $f(y) = g(y)$. Exiba condições suficientes para que exista um único ponto $y > 0$, tal que $f(y) = g(y)$. Dê exemplos explícitos de ambas as situações.
- (11) Sejam $f, g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ duas funções contínuas, satisfazendo $f(0) = 1$ e $g(0) = 2$. Assuma que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ e que $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Segue então que existe $y > 0$ tal que $f(y) = g(y)$.

- (12) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ contínua tal que $f(0) = 1/2$ e $f(x) \rightarrow 1$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$. Deduza que f assume um mínimo global.
- (13) Usando obrigatoriamente conexidade, deduza que uma matrix real $(2n + 1) \times (2n + 1)$ possui sempre um autovalor real.
- (14) (a) Seja $f : X \rightarrow Y$, uma aplicação contínua de um espaço métrico compacto X em um espaço métrico Y . Deduza que f é uniformemente contínua.
- (b) Seja X um subconjunto da reta real \mathbb{R} . Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, uma aplicação uniformemente contínua. Deduza que se a é um valor aderente a X , então limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, existe. Conclua que toda aplicação uniforme contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, admite uma única extensão contínua $F : \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$, (i. e, $F|_X = f$, F restrita a X é igual à f) que é uniformemente contínua. Além disso, conclua que se X é limitado, então $f(X)$ é limitado.
- (c) Dê exemplos de funções contínuas definidas em $(0, 1]$ que não são uniformemente contínuas.
- (d) Estabeleça um critério usando seqüências para que uma função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ não seja uniformemente contínua. Aplique para deduzir que $f(x) = x^3$ não é uniformemente em \mathbb{R} .
- (e) Seja X um subconjunto de um espaço métrico Z . Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, uma aplicação uniformemente contínua. Deduza que se a é um valor aderente a $X \subset Z$ (imagine X contido num espaço métrico ambiente Z , digamos $Z = \mathbb{R}^n$), então limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, existe. Conclua que toda aplicação uniformemente contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, admite uma única extensão contínua $F : \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$, que é além disso uniformemente contínua.
- (15) (*Teorema do ponto fixo de Brouwer*) Deduza que toda aplicação contínua $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ possui um ponto fixo, isto é $f(x) = x$ para algum $x \in [0, 1]$. Estabeleça alguma condição que garanta que o ponto fixo é único.
- (16) (*Teorema de Dini*) Seja X um compacto de \mathbb{R}^n . Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções contínuas em X que converge pontualmente para uma função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Assuma que $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$, $n = 1, 2, \dots$, e cada $x \in X$. Mostre que $f_n \xrightarrow{u}_X f$, i.e f_n converge uniformemente à f em X .
- (a) Mostre com um exemplo que a hipótese de compacidade é necessária.

- (b) Deduza, considerando obrigatoriamente a seguinte sugestão:
 Seja $\epsilon > 0$. Considere o conjunto
 $F_n := \{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$.
- (c) Deduza, usando obrigatoriamente o teorema de Arzelà-Ascoli.

(17) RESPONDA VERDADEIRO OU FALSO EM CADA ITEM. CASO VERDADEIRO ESBOCE UMA DEDUÇÃO SUCINTA CORRETA E EXIBA UM EXEMPLO QUE ILUSTRE A AFIRMAÇÃO, SE FOR O CASO. CASO FALSO, EXPLICA A FALSIDADE OU EXIBA UM CONTRAEXEMPLO, CONFORME A SITUAÇÃO. JUSTIFIQUE A SUA RESPOSTA. NÃO SERÃO ACEITAS RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS CORRETAS.

- (a) Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida num aberto de \mathbb{R}^2 que contém a origem, satisfazendo $f(0, 0) = 0$. Seja $F(x, y) = e^{f(x, y)}$, $(x, y) \in U$. Segue que existe $\epsilon > 0$, tal que $F(x, y) > 1/2$, para todo $(x, y) \in (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon)$.
- (b) Existe uma função contínua $f : [1, 2] \rightarrow [1, 2]$ tal que $f(t) \neq t, \forall t \in [1, 2]$.
- (c) Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow (-\infty, 0)$ uma função contínua. Assuma que $f(0, 0) = -2$ e que

$$\lim_{\|p\| \rightarrow \infty} f(p) = 0$$

- (i) Segue que $m := \min_{\mathbb{R}^2} \{f(x, y)\}$ existe e $m \leq -2$.
- (ii) Existe uma tal f da forma $f(x, y) = Ae^{g(x, y)}$, onde $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e A é uma constante.
- (d) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ uma função contínua, tal que $f(0) = 1/2$. Assuma que f satisfaz:
 Se $\{x_n\}$ é uma sequência satisfazendo $|x_n| \rightarrow \infty$ então $f(x_n) \rightarrow \infty$.
- (i) Existe uma tal f da forma de um polinômio de grau $2n$, para qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$.
- (ii) Nem sempre para uma tal f temos que o conjunto $f^{-1}([-1, 1])$ é um compacto.
- (e) Seja (X, d) um espaço métrico. Seja $f : X \rightarrow X$.
- (i) Deduza que se f é uma *imersão isométrica*, i. e

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y), \forall x, y \in X$$

- e se X é compacto então f é sobrejetora e daí deduza que f é uma isometria, por conseguinte, f é um homeomorfismo. *Sugestão:* Seja $z \in X$ e $z \notin f(X)$. Deduza que existe $\epsilon > 0$ tal que $d(z, f(X)) \geq \epsilon$. Forme a sequência $z_1 = f(z)$, $z_{n+1} = f(z_n)$, $n = 1, 2, \dots$. Analise $d(x_m, x_n)$, para $n \neq m$.
- (ii) Deduza que se f é um *encurtamento*, *i. e*

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y), \forall x, y \in X, x \neq y$$

e se X é compacto então f tem um único ponto fixo. *Sugestão:* Considere $A_n = f^n(X)$, onde $f^1 = f$, $f^{n+1} = f^n \circ f$. Em seguida, considere $A = \bigcap_n A_n$, e mostre que $A = f(A)$. Analise o diâmetro de A .

- (18) RESPONDA VERDADEIRO OU FALSO EM CADA ITEM. CASO VERDADEIRO ESBOCE UMA DEDUÇÃO SUCINTA CORRETA E EXIBA UM EXEMPLO QUE ILUSTRE A AFIRMAÇÃO, SE FOR O CASO. CASO FALSO, EXPLICA A FALSIDADE OU EXIBA UM CONTRAEXEMPLO, CONFORME A SITUAÇÃO. JUSTIFIQUE A SUA RESPOSTA. NÃO SERÃO ACEITAS RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS CORRETAS.

- (a) **(2.5 pt)** Não é verdade que para todo número real positivo $a > 0$, o conjunto

$$A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1}; \\ z^2 + \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} - 2a \right)^2 = a^2$$

é compacto.

- (b) **(2.5 pt)** Seja $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida na bola unitária aberta centrada na origem de \mathbb{R}^3 , satisfazendo $f(0, 0, 0) = 0$.

Defina $F(x, y, z) := e^{f(x, y, z)}$, $(x, y, z) \in B_1(0)$.

Segue que sempre podemos encontrar $\epsilon > 0$, tal que

$$F(x, y, z) > 1/2, \forall (x, y, z) \in (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon).$$

- (c) **(2.5 pt)** Seja $C > 0$ e $\alpha \in (0, 1)$. Seja $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, uma função α -Hölder contínua, *i.e* $f(x)$ satisfaz:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \forall x, y \in (-1, 1).$$

Seja $g(x) = e^{f(x)}$, $x \in (-1, 1)$.

Segue que $g(x)$ admite uma extensão contínua $G(x)$ ao intervalo fechado $[-1, 1]$. Ou seja, existe $G: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, contínua tal que $G(x) = g(x), \forall x \in (-1, 1)$.

(d) (i) **(0.5 pt)** Seja $g : (-1/2, \infty) \rightarrow (-1, 1)$ dada por $g(x) = \frac{x}{1+x}, x \in (-1/2, \infty)$. Segue que g é um homeomorfismo.

(ii) **(2.5 pt)** Considere a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (x/(1+x))^n$, $x \in [-1/4, 1/2]$.

Segue então que a série é absolutamente convergente para todo $x \in [-1/4, 1/2]$, mas não é uniformemente convergente no intervalo $[-1/4, 1/2]$.