LISTA 5 DE INTROD À TOPOLOGIA 2011

RICARDO SA EARP

Homotopia, recobrimento e grupo fundamental

(1) Usando a definição, deduza que a aplicação $f : S^1 \to S^1$ do círculo unitário em si mesmo, dada por $f(z) = z^2$ é um recobrimento com duas folhas.

Considere o recobrimento $p : \mathbb{R} \to S^1$ dado por $p(t) = e^{2\pi it}$. Seja $p_0 : [0,1] \to S^1$, dada por $p_0(s) = e^{2\pi is}$ e considere o caminho fechado $\alpha := f \circ p_0 : [0,1] \to S^1$. Explicite o levantamento $\widetilde{\alpha}$ de α satisfazendo $\widetilde{\alpha}(0) = 0$. Explique.

(2) Deduza que $p : S^1 \to S^1$ do círculo unitário em si mesmo dada por $p(z) = z^n$ é um recobrimento com n folhas. Considere o recobrimento $p : \mathbb{R} \to S^1$ dado por $p(t) = e^{2\pi it}$. Seja $p_0 : [0,1] \to S^1$, dada por $p_0(s) = e^{2\pi is}$ e considere o caminho fechado $\alpha := f \circ p_0 : [0,1] \to S^1$. Explicite o levantamento $\widetilde{\alpha}$ de α satisfazendo $\widetilde{\alpha}(0) = 0$. Explique.

(3) Deduza que um conjunto estrelado de $\mathbb{R}^n$ é simplesmente conexo.

(4) Seja X um espaço topológico. Suponha que $A \subset X$ seja um retrato de X. Ou seja, existe uma *retração* $r : X \to A$, *i.e* r é uma aplicação contínua que restrita à A é a identidade de A.

   (a) Seja E um espaço vetorial normado. Deduza que a bola unitária fechada de E centrada na origem é um retrato de E.

   (b) Mostre que se toda aplicação contínua $g : X \to X$ tem um ponto fixo então toda aplicação contínua $f : A \to A$ tem também um ponto fixo.

   Diz-se que um espaço topológico X possui a propriedade do ponto fixo, se toda aplicação contínua $f : X \to X$ tem um ponto fixo, *i.e* existe $x \in X$ tal que $f(x) = x$. Conclua que se X tem a propriedade do ponto fixo, então todo retrato A de X tem a mesma propriedade.

   (c) A ideia é mostrar que dado um convexo fechado $\mathcal{C}$ num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então existe uma projeção natural geométrica $P : \mathcal{H} \to \mathcal{C}$, com P contínua, satisfazendo

$P(x) = x, \forall x \in \mathcal{C}$. Daí P é uma retração de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ é um retrato de $\mathcal{H}$.

(i) Mostre que dado $x \in \mathcal{H}$ existe um único $y \in \mathcal{C}$, $P(x) := y$, tal que $d(x, \mathcal{C}) = d(x, y)$. *Sugestão*: Para a unicidade, use a lei do paralelogramo.

(ii) Deduza a seguinte caracterização: Dado um convexo fechado $\mathcal{C}$ do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, munido do produto interno $\langle , \rangle$ dado $x \in \mathcal{H}$, a projeção $y = P(x)$ é o único ponto de $\mathcal{C}$ que satisfaz
$\langle z - y, x - y \rangle \leqslant 0, \forall z \in \mathcal{C}$

(iii) Deduza que $P(x)$ é Lipschitz com constante de Lipschits igual a 1, ou seja
$\|P(x) - P(x')\| \leqslant 1, \forall x, x' \in \mathcal{H}$.

(5) Deduza que um compacto convexo no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é um retrato de alguma bola fechada $\overline{B_R(0)}$ de raio R suficientemente grande do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

(6) Assuma para este item o *teorema do ponto fixo de Brouwer*: Seja $\overline{B_1(0)}$ a bola unitária centrada na origem de $\mathbb{R}^n$. Se $f : \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$ é uma aplicação contínua, então f tem um ponto fixo.

Deduza:

(a) Se Y é um espaço homeomorfo a $\overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$, então toda aplicação contínua $f : Y \to Y$ tem um ponto fixo.

(b) Se C é um compacto convexo de $\mathbb{R}^n$, então toda aplicação contínua $f : C \to C$ tem um ponto fixo.

(c) Seja $X : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua (tal X é chamado de um campo de vetores) tal que a restrição de X à $\mathbb{S}^{n-1}$ satisfaça $X(x) \cdot x > 0$, onde $\cdot$ denota o produto interno de $\mathbb{R}^n$. Deduza, usando o teorema de Brouwer, que existe $x \in \overline{B_1(0)}$ tal que $X(x) = 0$.

Sugestão:

(i) Considere a aplicação $\overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}^n$ dada por
$x \mapsto x - \varepsilon X(x)$. Deduza que para ε suficientemente pequeno esta aplicação é contínua e sua imagem está contida na bola fechada $\overline{B_1(0)}$: Para conseguir mostrar isto, use a condição do campo sobre $\mathbb{S}^{n-1}$, combinado com um argumento de compacidade e continuidade, para provar que existe $\eta > 0$, tal que $\|x - \varepsilon X(x)\| \leqslant 1 - \eta, \forall x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Deduza que esta desigualdade se estende (tomando η suficientemente pequeno) para

$x \in \overline{B_1(0)}$ satisfazendo $\|x\| \geqslant r$, para algum r com $0 < r < 1$, usando de novo um argumento de compacidade e continuidade. Em seguida mostre que tomando, possivelmente, um ε menor ainda, se necessário, podemos garantir que se $x \in \overline{B_r(0)}$ então $x - \varepsilon X(x) \in \overline{B_r(0)}$. Encontre um ponto fixo desta aplicação $x \mapsto x - \varepsilon X(x)$, com o ε escolhido e conclua.

(ii) Assuma que $X(x) \neq 0, \forall x \in \overline{B_1(0)}$, considere $x \mapsto \frac{-X(x)}{\|X(x)\|}$, de $\overline{B_1(0)}$ em $\mathbb{S}^{n-1}$ e conclua.

É interessante que o teorema do ponto fixo de Brouwer pode ser aplicado para deduzir os seguintes resiultados de Álgebra Linear:

(i) Toda matriz quadrada $n + 1 \times n + 1$ cujas entradas são positivas admite um autovalor real positivo com autovetor de coordenadas positivas.
(ii) Toda matriz quadrada $n+1\times n+1$ cujas entradas são positivas ou nulas admite um autovalor real positivo ou nulo com autovetor de coordenadas positivas ou nulas.

No próximo resultado vamos estender o fato que um convexo fechado de um espaço de Hilbert é um retrato do espaço, usando a projeção num convexo discutida num num exercício acima.

(7) Assuma o *teorema de extensão de Dugundji* (compare com o *teorema de extensão de Tietze*): Seja A um conjunto fechado de um espaço métrico X. Seja C um conjunto convexo de algum espaço vetorial topológico localmente convexo E. Segue então que toda aplicação contínua $f : A \to C$ possui uma extensâo contínua $\overline{f} : X \to C$.

Deduza:

(a) Se C é um compacto convexo de $\mathbb{R}^n$ então C é retrato de uma bola fechada centrada na origem de raio R suficientemente grande.
(b) Usando o item anterior deduza que um compacto convexo de $\mathbb{R}^n$ tem a propriedade do ponto fixo.

OBS: Um teorema de Dugundji diz o seguinte: A bola unitária fechada de um espaço vetorial normado E tem a propriedade do ponto fixo, se e só se E tem dimensão finita.

(8) Deduza que para n ímpar a identidade de $\mathbb{S}^n$ é homotópica à aplicação antípoda. Observamos que para n par a identidade

de $\mathbb{S}^n$ não é homotópica à aplicação antípoda. Isto segue da teoria do grau (veja exerc (20) abaixo).

(9) Assuma os seguintes resultados: A identidade $I : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ não é homotopicamente trivial e a aplicação antípoda $\alpha : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, \alpha(x) = -x$, também não é homotopicamente trivial (veja (17) abaixo). Estes resultados também seguem da teoria do grau (veja exerc (20) abaixo).

Deduza:

(a) Se uma aplicação contínua $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ é homotopicamente trivial, então f tem um ponto fixo e f leva um ponto x no seu antípoda $-x$.

(b) Não existe retração $r : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{S}^n$.

(c) (*Teorema do ponto fixo de Brouwer*) Seja $\overline{B_1(0)}$ a bola unitária centrada na origem de $\mathbb{R}^n$. Se $f : \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$ é uma aplicação contínua, então f possui um ponto fixo. *Sugestão*: Caso contrário, seja $\overrightarrow{f(x)x}$ a semireta orientada começando em $f(x)$ e passando em x. Tal semireta corta a esfera $\mathbb{S}^n$ num ponto $h(x)$. Deduza que $h : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{S}^n$ é contínua e é uma retração. Aplique o item anterior.

(10) Considere a esfera $\mathbb{S}^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ e considere $e^{2\pi i/n} \in \mathbb{S}^3$. Considere o homeomorfismo $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$, dado por $f(z, w) = (e^{2\pi i/n} z, e^{2\pi i/n} w)$. Considere H o grupo de homeomorfismos de $\mathbb{S}^3$ gerado por f (fazendo composições).

(a) Deduza que H é um grupo cíclico de ordem n.

(b) Deduza que H é um grupo propriamente descontínuo de homeomorfismos e que $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3/H := L(n, 1)$ é um recobrimento com n folhas de $\mathbb{S}^3$ sobre $\mathbb{S}^3/H := L(n, 1)$, chamado de *espaço lenticular*. Deduza que $L(n, 1)$ é uma variedade compacta de dimensão 3.

(c) Aplicando a teoria dos espaços de recobrimento, deduza que o grupo fundamental do espaço lenticular $L(n, 1)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_n$. Exiba um gerador deste grupo.

(d) Deduza que $L(2, 1)$ é o plano projetivo P^3.

(11) Sejam $p_1 : X \to X_1$ e $p_2 : X_1 \to Y$ recobrimentos. Deduza que se p_2 tem um número finito de folhas para cada $y \in Y$ então $p := p_2 \circ p_1$ é um recobrimento.

(12) Deduza que se $f, g : X \to Y$ são homotópicas, e se $f', g' : Y \to Z$ são também homotópicas então $f \circ f'$ e $g \circ g'$ são homotópicas.

(13) Sejam $r : X \to A$ uma retração e $j : A \subset X$ a inclusão. Dizemos que $A \subset X$ é um retrato por deformação de X se $j \circ r$ é homotópica á identidade de X.

(a) Deduza que se $A \subset X$ é um retrato por deformação de X, então A e X tem o mesmo tipo de homotopia.

(b) Seja L o eixo dos z de $\mathbb{R}^3$. Deduza que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ é um retrato por deformação de $\mathbb{R}^3 \setminus L$.

(c) Seja $X \subset \mathbb{R}^2$ definido por $X = \{0\} \times [0,1] \cup [0,1] \times \{0\} \cup \{1/n\} \times [0,1]$, $n = 1, 2, \ldots$. Deduza que $\{0\} \times [0,1]$ é um retrato por deformação de X.

(d) Seja $\overline{B_1(0)}$ a bola unitária fechada de $\mathbb{R}^n$ Seja $\left(\overline{B_1(0)} \times \{0\}\right) \cup (\mathbb{S}^{n-1} \times [0,1])$. Deduza que $\left(\overline{B_1(0)} \times \{0\}\right) \cup (\mathbb{S}^{n-1} \times [0,1])$ é um retrato por deformação de $\overline{B_1(0)} \times [0,1]$. *Sugestão*: Faça a projeção de um ponto da forma $(0, \ldots, 0, a) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $a > 1$.

(e) Deduza que a figura oito é um retrato por deformação do plano menos dois pontos.

(14) Seja $p : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dada por $p(z) = z^n$. Deduza que p é um recobrimento com n folhas. Faça uma dedução do caso $n = 2$, usando a definição.

(15) Seja $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots a_0$, um polinômio complexo. Discuta a existência de conjuntos finitos F_1 e F_2 tal que $p : \mathbb{C} \setminus F_1 \to \mathbb{C} \setminus F_2$ seja um recobrimento com n folhas.

(16) Seja a hélice dada por $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = \cos t, y = \sin t, z = bt, b \neq 0\}$. Seja $\pi : H \to S^1$ dada por $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Deduza que π é uma aplicação de recobrimento.

(17) Seja S o helicóide gerado pelas normais à hélice H do exemplo anterior. Seja L o eixo dos z. Seja $\pi : S \setminus L \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dada pela projeção ortogonal $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Deduza que π é uma aplicação de recobrimento.

(18) Lembre que um espaço X é contrátil se X tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto, ou seja se a aplicação identidade de X em X é homotópica a uma constante.

(a) Exiba exemplos de espaços contráteis, mostrando que de fato são contráteis.

(b) Deduza que se X ou Y são contráteis, então toda aplicação contínua de X em Y é homotópica a uma constante.

(c) Deduza que se X é contrátil então o produto $X \times Y$ tem o mesmo tipo de homotopia de Y. Conclua que $\mathbb{S}^n \times B_1(0)$

tem o mesmo tipo de homotopia da esfera $\mathbb{S}^n$. Dê outros exemplos da mesma natureza.

(19) Suponha que $f : X \to Y$ (contínua) seja uma equivalência homotópia de X com Y e que $g : Y \to Z$ (contínua) seja também uma equivalência homotópica de Y com Z.
   (a) Deduza que $g \circ f : X \to Z$ é uma equivalência homotópica de X com Z.

   Considere o disco perfurado $\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C},\, 0 < |z| < 1\}$.

   (b) Deduza que $\mathcal{D}$ tem o mesmo tipo de homotopia do círculo.
   (c) Deduza que $\mathcal{D}$ tem o mesmo tipo de homotopia do cilindro vertical em $\mathbb{R}^3$.
   (d) Deduza que $\mathcal{D}$ não é simplesmente conexo. Dê outros exemplos do mesmo tipo.

(20) Dizemos que uma aplicação contínua $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$ é antipodal (ou preserva antípodas), se $g(-x) = -g(x), \forall x \in S^n$.

   Assuma o *teorema de Borsuk-Ulam*: Nenhuma aplicação antipodal contínua $f : S^n \to S^n$ é homotopicamente trivial.
   Deduza:

   (a) Não existe retração $r : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{S}^n$.
   (b) Não existe aplicação antipodal contínua $f : S^{n+1} \to S^n$.
   (c) (*Teorema de Borsuk-Ulam*) Dada uma aplicação contínua $f : S^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, existe $x \in S^{n+1}$ tal que $f(x) = f(-x)$.
   (d) Se$f : S^n \to \mathbb{S}^n$, contínua satisfaz $f(x) \neq f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{S}^n$, então f é sobrejetora.

   Usando o Teorema de Borsuk-Ulam, pode se mostrar o seguinte curioso resultado: Dados conjuntos mensuráveis $A_1, \ldots, A_{n+1}$ em $\mathbb{R}^{n+1}$, existe um hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$ que corta todos eles ao meio.

(21) *O teorema do ponto fixo de Tychonoff* diz o seguinte: Seja V um espaço vetorial topológico (a topologia de V é Hausdorff e as operações de soma e de produto por escalar são contínuas). Assuma que V é localmente convexo (e.g, $V = E$ um espaço vetorial normado). Seja C um conjunto convexo compacto de V. Segue que toda aplicação contínua $f : C \to C$ possui um ponto fixo.

   Aplicando o teorema de Tychonoff e usando o fato que o envelope convexo fechado de um conjunto compacto de um espaço de Banach é compacto, pode-se demonstrar o famoso teorema do ponto fixo de Schauder.

Teorema do ponto fixo de Schauder. Seja A um conjunto fechado convexo de um espaço de Banack E. Seja $f : A \to A$ contínua tal que $\overline{f(A)}$ é compacto (dizemos que $f(A)$ é precompacto). Segue que f tem um ponto fixo.

Observamos que sem a hipótese de $\overline{f(A)}$ compacto o enunciado do teorema de Schauder não vale.

Precisamos da seguinte definição: Sejam E e F espaços vetoriais normados. Dizemos que uma aplicação $f : E \to F$ é compacta, se é contínua e se as imagens de subconjuntos limitados de E são precompactas (i.e tem fecho compacto).

Deduza, usando o teorema do ponto fixo de Schauder o seguinte:

(a) Um conjunto convexo compacto de um espaço de Banack tem a propriedade do ponto fixo.

(b) Agora vamos dar uma demonstração de uma forma particular do conhecido teorema de Leray-Schauder. O teorema de Leray-Schauder está baseado no teorema de Schauder acima. Tem sido uma ferramenta fundamental na demonstração de certos resultados de existência de soluções de E.D.P.´s não lineares elíticas de segunda ordem.

Seja $f : E \to E$ uma aplicação contínua compacta de um espaço de Banach E em si mesmo. Suponha que exista uma constante *apriori* C tal que

$$\|x\|_E \leqslant C$$

para todo $x \in E$ e todo $\sigma \in [0, 1]$ satisfazendo $x = \sigma f(x)$. Segue que f tem um ponto fixo.

Sugestão: Seja $\overline{B_{C+1}(0)}$ a bola fechada de raio $C + 1$ centrada na origem de E. Considere $g : \overline{B_{C+1}(0)} \to \overline{B_{C+1}(0)}$, definida por $g(x) = f(x)$, se $\|f(x)\| \leqslant C + 1$, e $g(x) = (C+1)f(x)/\|f(x)\|$, se $\|f(x)\| \geqslant C+1$. Deduza que g tem um ponto fixo e que este ponto fixo é um ponto fixo de f. Deduza que na verdade σf tem um ponto fixo para todo $\sigma \in [0, 1]$.

Observamos que podemos enunciar o resultado acima na forma chamada de alternativa de Leray-Schauder: Seja $f : E \to E$, onde E é um espaço de Banack. Dizemos que f

que f satisfaz a condição de Leray Schauder no bordo se existe $r > 0$ tal que se $\|x\| = r$ então $f(x) \neq \lambda x$, $\forall \lambda > 1$.

Note que se $\|x\| = r$ implica $\|f(x)\| \leqslant r$, então f satisfaz a condição de Leray-Schauder no bordo.

(c) Deduza a alternativa de Leray-Schauder: se $f : E \to E$ é uma aplicação contínua compacta de um espaço de Banach E em si mesmo satisfazendo a a condição de Leray-Schauder no bordo então f tem um ponto fixo.

(d) Vamos dar uma dedução de uma forma fraca do teorema de Tychonoff, fazendo uso da chamada projeção de Schauder:

Seja K um conjunto compacto convexo de um espaço normado E. Seja $f : K \to K$ uma aplicação contínua de K em si mesmo. Deduza que F tem um ponto fixo seguindo o seguinte roteiro:

(i) Seja $k > 0$ fixado, $k \in \mathbb{N}$. Deduza que existem finitos $x_1, \ldots, x_N.N = N(k)$ tal que as bolas $B^i := B_{1/k}(x_i)$ recobrem $K, i = 1, \ldots, N$.

(ii) Seja $K_k \subset K$ o envelope convexo do conjunto $\{x_1, \ldots, x_N\}$, isto é K_k é o menor convexo que contém estes pontos. Deduza que K_k é homeomorfo a uma bola fechada de algum espaço Euclideano $\mathbb{R}^n$.

(iii) Defina $J_k : K \to K_k$, a *projeção de Schauder* por

$$J_k(x) = \frac{\sum d(x, K \setminus B^i) x_i}{\sum d(x, K \setminus B^i)}, \ \forall x \in K$$

Deduza que $J_k : K \to K_k$ é contínua.

(iv) Deduza que $\|J_k(x) - x\| < \frac{1}{k}$.

(v) Deduza, usando o item anterior, que $J_k \circ f$ restrita à K_k tem um ponto fixo x_k.

(vi) Deduza que existe uma subsequência de $\{x_k\}$ que converge a um ponto $x \in K$ e que x é um ponto fixo de f.

(22) Assuma que para toda aplicação contínua $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ está associado um número inteiro $n \in \mathbb{Z}$ chamado de grau de f. Observamos que todo inteiro pode ser realizado como grau de alguma aplicação contínua $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. Assuma:

(a) Aplicações homotópicas tem o mesmo grau. Na verdade duas aplicações $f, g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ são homotópicas, se e só se tem o mesmo grau.

(b) $\mathrm{grau}(g \circ f) = \mathrm{grau}(g)\mathrm{grau}(f)$.

(c) A identidade tem grau 1, a reflexão num hiperplano tem grau -1 e a aplicação constante tem grau 0.

Deduza:

(a) Não existe retração $r : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{S}^n$.
(b) Se A é um conjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ então não existe retração $r : \overline{A} \to \partial A$.
(c) Se $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ tem grau diferente de $(-1)^{n+1}$, então f tem um ponto fixo.
(d) Se $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ tem grau diferente de 1 então f leva algum x no seu antípoda $-x$.
(e) Se S^n admite um campo contínuo de vetores tangentes não nulos, então n é ímpar. Lembremos que um campo de vetores tangentes é uma aplicação $v : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, tal que $v(x)$ é ortogonal a x em todos os pontos.
(f) Deduza o exercício 6 (c), usando a teoria do grau.

(23) Seja $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ o disco unitário aberto centrado na origem. Seja $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma aplicação contínua que não se anula.

(a) Deduza que existe $g : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ contínua tal que $f(z) = e^{g(z)}$, $\forall z \in \mathcal{D}$. Neste item você poderá usar a teoria dos espaços de recobrimento, mas sugiro tentar dar uma dedução direta, imitando a dedução do teorema geral, por exemplo.

(b) Usando a teoria dos espaços de recobrimento e grupo fundamental, dê uma condição ,em termo do "número de voltas" de um caminho fechado $f \circ \alpha : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, onde $\alpha : [0,1] \to A$ é um caminho fechado, para que uma aplicação contínua $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, onde A é um aberto admita um levantamento contínuo $g : A \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^{g(z)}$. Deduza neste caso que se f é holomorfa, então g será também holomorfa. A função g é chamado de " ramo de $\log f(z)$".

(c) Usando a teoria dos espaços de recobrimento e grupo fundamental, dê uma condição ,em termo do "número de voltas" de um caminho fechado $f \circ \alpha : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, onde $\alpha : [0,1] \to A$ é um caminho fechado, para que uma aplicação contínua $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, onde A é um aberto admita um levantamento contínuo $g : A \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = g^k(z), k \in \mathbb{Z}, k > 0$. Deduza neste caso que se f é holomorfa, então g será também holomorfa. A função g é chamado de " ramo de $(f(z))^{1/k}$ ".

(d) Agora, assuma que a função contínua $f : \overline{\mathcal{D}} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ restrita à S^1 seja antipodal, *i.e* $f(-z) = -f(z)$, $\forall z \in S^1$. Deduza que $g(z) - g(-z)$, dada no item (a), é constante não nula e obtenha uma contradição.
Conclua daí que não existe retração (contínua) $r : \overline{\mathcal{D}} \to S^1$. Deduza o teorema do ponto fixo de Brouwer para uma aplicação contínua $g : \overline{\mathcal{D}} \to \overline{\mathcal{D}}$.
• Deduza, usando o exercício anterior, o teorema de Borsuk-Ulam: Nenhuma aplicação antipodal contínua $f : S^1 \to S^1$ é homotopicamente trivial. OBS: Na verdade uma aplicação antipodal $f : S^1 \to S^1$ tem grau ímpar.

• Seja $\alpha_0 : [0,1] \to S^1$ dada por $\alpha_0(t) = e^{2\pi i t}$. Seja $\pi(S^1, 1)$ o grupo fundamental de S^1 e seja $[a_0] \in \pi(S^1, 1)$ a classe do caminho fechado a_0. Seja $f : S^1 \to S^1$ antipodal satisfazendo $f(1) = a \in S^1$. Seja $g : S^1 \to S^1$, dada por $g(z) = z/a$. Seja $h = g \circ f : S^1 \to S^1$. Note que $h(1) = 1$. Sejam $f_* : \pi(S^1, 1) \to \pi(S^1, a)$, $g_* : \pi(S^1, a) \to \pi(S^1, 1)$ e $h_* : \pi(S^1, 1) \to \pi(S^1, 1)$, os homomorfismos entre os grupos fundamentais induzidos por f, g e h, respectivamente.
Deduza, usando o exercício anterior, que existe $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $h_*[\alpha_0] = n[\alpha_0]$.
• Deduza que não existe uma aplicação antipodal contínua $f : S^2 \to S^1$ (*i.e* $f(-p) = -f(p)$, $\forall p \in S^2$).
• Deduza, usando o exercício anterior, o teorema de Borsuk-Ulam: Dada uma aplicação contínua $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$, existe $x \in S^2$ tal que $f(x) = f(-x)$.
• Deduza, usando o exercício anterior, o seguinte resultado: Dados duas regiões limitadas de $\mathbb{R}^2$ delimitadas por um polígono, existe uma reta de $\mathbb{R}^2$ que corta as duas regiões no meio.

Sugestão: Considere o plano π em $\mathbb{R}^3$ dado pela equação $z = 1$, onde $\mathbb{R}^3$ está munido de coordenadas (x, y, z). Considere π como uma cópia do plano $\mathbb{R}^2$. Considere as regiões poligonais R_1 e R_2 contidas em π. Para cada plano P passando pela origem de $\mathbb{R}^3$ orientado por um normal unitário u. Considere o semi espaço dado pela componente conexa de $\mathbb{R}^3 \setminus P$ para a qual o normal u aponta. Vamos chamar o fecho deste semi espaço de P^+. Defina $f_i : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ por $f_i(u) =$ área da parte de R_i que está em P^+, $i = 1, 2$. Defina $F : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $F(u) = (f_1(u), f_2(u))$. Aplique o teorema de Borsuk-Ulam.

• Deduza do teorema do ponto fixo de Brouwer para o disco fechado de $\mathbb{C}$ e da projeçao num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ sobre um convexo fechado $\mathcal{C}$, que todo convexo compacto de $\mathbb{C}$ tem a propriedade do ponto fixo.

(24) Sejam X e Y espaços métricos. Assuma X conexo e Y simplesmente conexo. Deduza que todo homeomorfismo local próprio $f : X \to Y$ é um homeomorfismo global.

(25) Calcule os grupos fundamentais dos seguintes espaços:
  (a) toro sólido: $S^1 \times \overline{\mathcal{D}}$, onde $\mathcal{D}$ é o disco fechado de raio 1 centrado na origem.
  (b) $\mathbb{R}^3 \setminus L$, onde L é uma reta de $\mathbb{R}^3$.
  (c) $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$.
  (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4\}$.
  (e) cilindro $S^1 \times [0, 1]$.
  (f) $\overline{B_1(0)} \setminus \{0\}$, onde $\overline{B_1(0)}$ é a bola unitária fechada centrada na origem de $\mathbb{R}^n$.

(26) Deduza que os conjuntos abaixo tem grupos fundamentais não abelianos, já que são isomorfos ao grupo fundamental da figura oito.
  (a) O toro $\mathbb{T}^2$ com um ponto removido.
  (b) O espaço $\mathbb{R}^3$ com os semi eixos não negativos dos x, dos y e dos z removidos.

(27) Fazendo um detalhamento, deduza que $\pi_1(P^2, x_0) = \mathbb{Z}_2$, onde P^2 é o plano projetivo.

(28) Usando o conhecimento do grupo fundamental, deduza: A esfera S^2 o plano projetivo P^2, o toro $\mathbb{T}^2$, e o bitoro $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ não são homeomorfos.

(29) Seja $SO(3)$ o grupo de rotações de $\mathbb{R}^3$. Admita a existência de um homomorfismo contínuo sobrejetor aberto $h : \mathbb{S}^3 \to SO(3)$, cujo núcleo é $\{\pm 1\}$. Estamos considerando o modelo dos quatérnions para $\mathbb{R}^4$. Deduza que o recobrimento universal de $SO(3)$ é $\mathbb{S}^3$. Conclua que $\pi_1(SO(3), x_0) = \mathbb{Z}_2$. Deduza que o espaço projetivo P^3 é homeomorfo à $SO(3)$.

(30) Responda verdadeiro ou falso em cada item. Caso verdadeiro esboce uma dedução sucinta correta e exiba um exemplo que ilustre a afirmação, se for o caso. Caso falso, explique a falsidade ou exiba um contraexemplo, conforme a situação. Justifique a sua resposta. Não serão aceitas respostas sem justificativas corretas.

(a) Seja X um espaços métrico conexo e seja $x_0 \in X$. Seja $\mathbb{S}^2$ a esfera unitária centrada na origem de $\mathbb{R}^3$. Suponha que exista uma aplicação contínua
$f : X \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ que é um homeomorfismo local próprio. Segue que
 (i) X é compacto.
 (ii) $\pi_1(X, x_0)$ é trivial.
 (iii) Toda aplicação contínua $g : X \to \mathbb{T}^2$ é homotopicamente trivial, onde $\mathbb{T}^2$ é o toro de dimensão 2.
 (iv) Se Y é um espaço métrico, então todo homeomorfismo local sobrejetor $h : X \to Y$ é um recobrimento com um número n de folhas, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(b) Um homeomorfismo local $f : X \to \mathbb{R}^2$ de um espaço topológico conexo por caminhos X sobre $\mathbb{R}^2$ (sobrejetor) é um homeomorfismo global.

(c) Seja $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\, x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$, o disco unitário fechado de $\mathbb{R}^3$, centrado na origem. Sejam L_1, L_2 e L_3 os segmentos fechados dados respectivamentes por $L_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\, y = z = 0, 0 \leqslant x \leqslant 1, \}$, $L_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\, x = z = 0, 0 \leqslant y \leqslant 1, \}$ e $L_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\, x = y = 0, 0 \leqslant z \leqslant 1, \}$.
 (i) Segue que $B \setminus L_1 \cup L_2$, tem grupo fundamental não abeliano.
 (ii) Segue que $B \setminus L_1 \cup L_2 \cup L_3$, tem grupo fundamental não abeliano.

(d) Seja $h : S^1 \to S^1$ uma aplicação contínua antipodal satisfazendo $h(1) = 1$ e $h(-z) = -h(z), \forall z \in S^1$.
Seja $q : S^1 \to S^1$ satisfazendo $q(z) = z^2, \forall z \in S^1$.
 (i) Segue que existe uma aplicação contínua $k : S^1 \to S^1$ tal que $k \circ q = q \circ h$. (*Sugestão*: faça o desenho do diagrama).
 Além disso, vale que $k(1) = 1$ e $h(-1) = -1$.
 (ii) Se $\widetilde{f}$ é um caminho em S^1 começando em $z = 1$ e terminando em $z = -1$, então o caminho fechado $f = q \circ \widetilde{f}$ representa um elemento não trivial em $\pi_1(S^1, 1)$.

 Sugestão: faça o desenho do diagrama ampliado, juntando a aplicação de recobrimento canônica

$\pi : \mathbb{R} \to S^1$ e explicitando as aplicações e levantamentos.

(iii) Se $\widetilde{f}$ é um caminho fechado em S^1 começando em $z = 1$ e terminando em $z = -1$ e se $f = q \circ \widetilde{f}$ então o homomorfismo induzido k_* não é trivial em $\pi_1(S^1, 1)$

Lembrete: o homomorfismo induzido k_* é definido por $k_*[f] := [k \circ (q \circ \widetilde{f})]$.

(iv) A aplicação h não é trivial já que o homomorfismo induzido h_* é injetivo.