

# Iniciação às superfícies mínimas

*incluindo uma discussão baseada no estudo com Pierre Bérard  
(IJF) sobre a “propriedade de Lindelöf”*

Ricardo Sá Earp

Departamento de Matemática

Dezembro de 2009

## A linguagem proveniente da Análise Complexa: Funções holomorfas e aplicações conformes

Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um domínio simplesmente conexo do plano complexo  $\mathbb{C} := \{z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}\}$ . Dizemos que  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto f(z)$  uma função complexa definida em  $U$  é **holomorfa** se  $f$  possui derivada complexa  $f'(z)$  em todos os pontos de  $U$ , ou seja o limite

$$f'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe e é finito para todo  $z \in U$ .

Dizemos que  $f$  é **conforme**, se  $f$  preserva *ângulos orientados*. Um fato que pode ser provado via as *equações de Cauchy-Riemann*, é que  $f$  é conforme se e somente se  $f$  é holomorfa e  $f'(z) \neq 0$ ,  $\forall z \in U$ .

## Aplicação de Joukowski

Por exemplo, considere a **aplicação de Joukowski**  $J(z)$  dada por  $z \mapsto 1/2(z + 1/z)$ . Note que  $J'(z) = 1/2(1 - 1/z^2)$ .

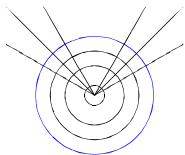
Assim,  $J(z)$  é holomorfa em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  e é conforme para  $z \neq \pm 1$ . A aplicação de Joukowski é **univalente** (injetiva) e aberta no disco unitário perfurado  $B^* = \{0 < |z| < 1\}$ ; logo  $J(z)$  é um **mapeamento conforme** que leva  $B^*$  conformemente sobre sua imagem  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ .

Os círculos concêntricos centrados na origem e os raios partindo da origem são levados em elipses e hipérbolas cofocais.

Observamos também que  $J(z)$  é um mapeamento conforme do semi-plano superior  $H = \{\text{Im}z > 0\}$  sobre  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ .

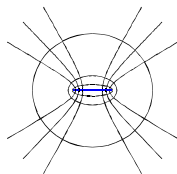
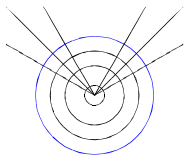
Aplicação de Joukowski:  $z \mapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

- ▶ A família de círculos centrados na origem de raio  $r > 1$  ou  $r < 1$ , e raios ortogonais a estes círculos
- ▶ enviada respectivamente em elipses e hipérbolas cofocais



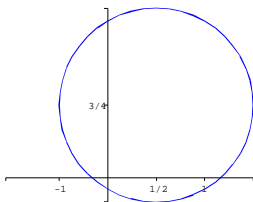
Aplicação de Joukowski:  $z \mapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

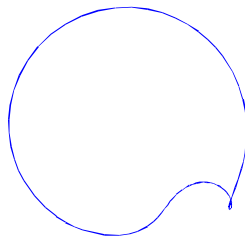
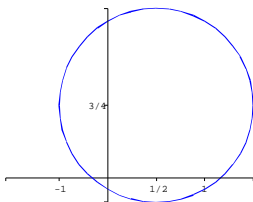
- ▶ A família de círculos centrados na origem de raio  $r > 1$  ou  $r < 1$ , e raios ortogonais a estes círculos
- ▶ enviada respectivamente em elipses e hipérboles cofocais



Aplicação de Joukowski:  $z \mapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

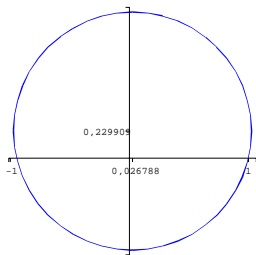
- ▶ Vamos ver agora a imagem do círculo deslocado, de centro  $(1/2, 3/4)$  e de raio 1 que envolve o ponto singular  $z = 1$

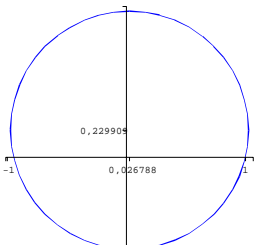




Aplicação de Joukowski:  $z \mapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

- ▶ Vamos ver agora a imagem de um círculo deslocado, de raio 1 que passa pelo ponto singular  $z = 1$
- ▶ A transformação de Joukowski tem importância em certas aplicações em aerodinâmica: **Perfil de Joukowski**, construção de asas de avião.





À toda função  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , (não necessariamente holomorfa) que possui derivadas parciais  $f_x := \frac{\partial f}{\partial x}$  e  $f_y := \frac{\partial f}{\partial y}$  ( $z = x + iy$ ), é costume associar as derivadas com respeito a  $z$  e a  $\bar{z}$

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y), \quad f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y).$$

Pode ser facilmente verificado que se  $f$  é holomorfa em  $U$ , então  $f_{\bar{z}} \equiv 0$ , em  $U$  (equações de Cauchy-Riemann). Neste caso, tem-se que  $f'(z) = f_z$ .

Uma função holomorfa  $f$  em  $U$ , exceto num conjunto de pontos isolados  $\mathcal{S}$  de  $U$ , tal que  $\lim |f(z)| = \infty$ , quando  $z$  tende à algum destes pontos isolados é chamado de função **meromorfa**. Cada ponto de  $\mathcal{S}$  é chamado de **pólo** de  $f$ . Por exemplo: a **função de Joukowski**:  $J(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ , possui um pólo na origem, daí é meromorfa em  $\mathbb{C}$  e holomorfa em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Por outro lado,  $h(z) = z + \bar{z}^n/n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  não é uma função holomorfa já que  $h_{\bar{z}} = \bar{z}^{n-1} \neq 0$ . Diferenciando-se  $h(z)$  com respeito a  $z$  obtém-se que  $h_{z\bar{z}} = 0$ .

Note que a se  $f(z) := u(z) + iv(z)$ ,  $u(z), v(z) \in \mathfrak{R}$  é holomorfa, então, sua **parte real** dada por  $u(z) = \Re f(z) = (f(z) + \bar{f}(z))/2$ , é **harmônica**, ou seja  $(\Re f(z))_{z\bar{z}} = 0$ , já que

$$(f(z))_{\bar{z}} = 0 = (\bar{f}(z))_z.$$

Isto leva ao conceito de funções e aplicações harmônicas que é fundamental na **Análise Complexa** e na **Teoria das Superfícies**.

## Aplicações harmônicas de $U \subset \mathbb{C}$ no plano complexo $\mathbb{C}$

Dizemos que  $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $w := u + iv \mapsto h(w)$ , é uma aplicação harmônica.

$$h_{w\bar{w}} = \frac{\partial^2 h}{\partial w \partial \bar{w}} = 0$$

Ou seja,  $\Delta h := h_{uu} + h_{vv} = 0$ , o **Laplaciano** de  $h$  é nulo; assim temos a noção usual de harmonicidade das variáveis complexas.

Vimos que a aplicação

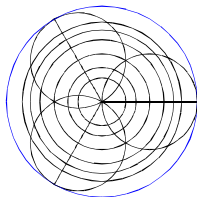
$h : B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto h(z) = z + \bar{z}^n/n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  é harmônica.

Como também é univalente (injetiva) e aberta dizemos que

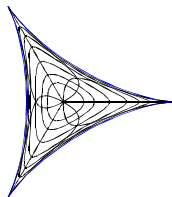
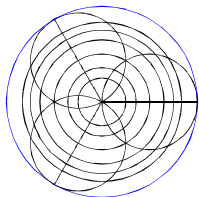
$w = h(z)$  é um **mapeamento harmônico** de  $B_1(0)$  sobre sua imagem, que vem a ser um **hipociclóide** com  $n + 1$  **cúspides** inscrito no círculo  $|w| = (n + 1)/n$ . Quando  $n = 2$  (três cúspides) obtemos o **deltóide**, quando  $n = 3$  (quatro cúspides) obtemos o **astróide**.

Mapeamento harmônico do **disco unitário** no interior do deltóide:  $z \mapsto z + \bar{z}^2/2$

- ▶ Disco unitário, **desenhados**, os semi-eixos em  $\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$ , círculos concêntricos e outros círculos centrados nos eixos.

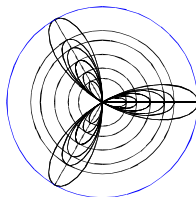


Sua imagem, por  $z \mapsto z + \bar{z}^2/2$ , é o interior do deltóide



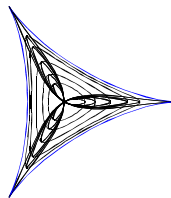
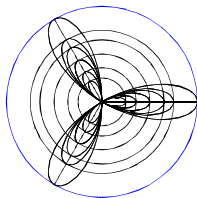
Mapeamento harmônico do **disco unitário** no interior do deltóide:  $z \mapsto z + \bar{z}^2/2$

- ▶ Disco unitário, **desenhados**, os semi-eixos em  $\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$ ,



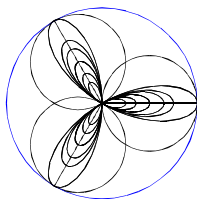
círculos concêntricos e rosáceas.

Sua imagem, por  $z \mapsto z + \bar{z}^2/2$ , é o interior do deltóide



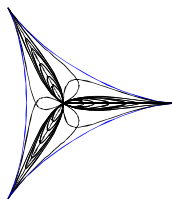
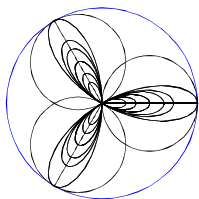
Mapeamento harmônico do **disco unitário** no interior do deltóide:  $z \mapsto z + \bar{z}^2/2$

- ▶ Disco unitário e sua imagem, **desenhados**, os semi-eixos em  $\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$ , rosáceas e outros círculos centrados nos eixos.

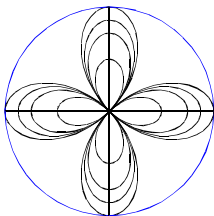


Mapeamento harmônico do **disco unitário** no interior do deltóide:  $z \mapsto z + \bar{z}^2/2$

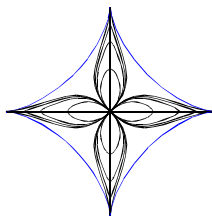
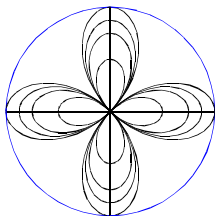
- ▶ Disco unitário e sua imagem, **desenhados**, os semi-eixos em  $\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$ , rosáceas e outros círculos centrados nos eixos.



Mapeamento harmônico do **disco unitário** no interior do astróide:  $z \mapsto z + \bar{z}^3/3$



Mapeamento harmônico do **disco unitário** no interior do astróide:  $z \mapsto z + \bar{z}^3/3$



## Superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$

Agora considere o espaço  $\mathbb{R}^3$  munido do produto escalar usual  $\cdot$  :

Dizemos que uma aplicação

$X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $z \mapsto X(z)$  é uma **imersão conforme**, se  $X_x \cdot X_y = 0$ ,  
 $X_x \cdot X_x = X_y \cdot X_y \neq 0$ ,  $\forall z \in U$ .

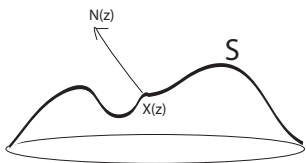
Seja  $N$  a **aplicação de Gauss Euclideana** (normal unitário) definida por

$N = \frac{X_x \times X_y}{\|X_x \times X_y\|}$ . O símbolo  $\times$  refere-se ao produto vetorial de  $\mathbb{R}^3$ .

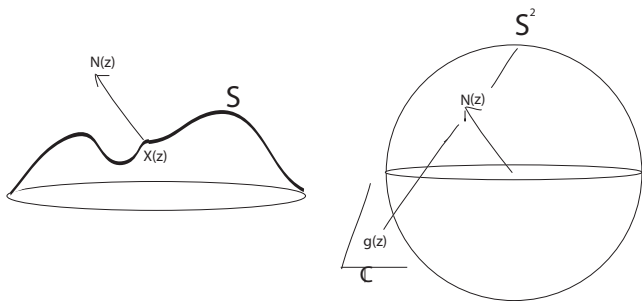
Superfícies  $\mathbb{S} = X(U)$  que **minimizam** área têm sido estudadas em vários contextos. Tais superfícies são **mínimas**: a **curvatura média** = semi-soma das **curvaturas principais** é **nula** (vamos ver explicação adiante).

Uma definição equivalente mais bem ajustada ao nosso enfoque é que a composta da aplicação normal de Gauss com a aplicação estereográfica  $\Pi$  do pólo norte da esfera unitária  $\mathbb{S}^2$  é uma função meromorfa; isto é  $\Pi \circ N := g$  é meromorfa.

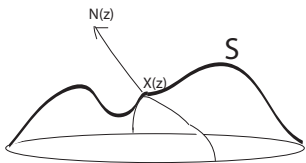
# A aplicação normal de Gauss



# A aplicação normal de Gauss



A curvatura média:  $H = \frac{k_1+k_2}{2}$ ,  $k_1, k_2$  são as curvaturas principais. Mínima:  $H = 0$



Propriedade básicas de imersões mínimas conformes em  $\mathbb{R}^3$ 

É possível mostrar que

$$X : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad w \in U \mapsto X(w) = (x_1(w), x_2(w), x_3(w))$$

é uma **imersão mínima conforme**  $\iff X_{w\bar{w}} = 0$ , ou seja as coordenadas  $x_1(w), x_2(w), x_3(w)$  são **funções harmônicas** da variável  $w$ .

Assim, é possível determinar uma imersão mínima conforme

$X(w) = (x_1(w), x_2(w), x_3(w))$ , em  $\mathbb{R}^3$  usando a famosa **representação de Weierstrass**  $(g(w), f(w) dw)$ .

É preciso levar em conta que  $g(w)$  a aplicação normal de Gauss é **meromorfa** e que as coordenadas da imersão são funções harmônicas, fazendo **integração complexa** e lembrando que **a parte real de uma função holomorfa é harmônica**:

$$X(w) = \left( \Re \int_{w_0}^w \frac{(1-g^2)f}{2} dw, \Re i \int_{w_0}^w \frac{(1+g^2)f}{2} dw, \Re \int_{w_0}^w fg dw \right)$$

## Exemplos de superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$

A família catenóide-helicóide : Neste caso

$U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $g(w) = w$ ,  $f(w) dw = e^{i\theta}/w^2 dw$ , quando  $\theta = 0$ , obtemos o catenóide  $X_0(w)$ , quando  $\theta = \pi/2$ , obtemos o helicóide  $X_{\pi/2}(w)$ :

Em geral  $X_\theta(w) = \cos \theta X_0(w) + \sin \theta X_{\pi/2}(w)$  devido a representação de Weierstrass dada por

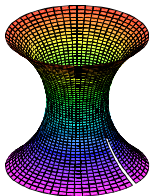
$$X_\theta = \left( \Re \int_1^w \frac{(\frac{1}{\zeta^2} - 1)e^{i\theta}}{2} d\zeta, \Re i \int_1^w \frac{(\frac{1}{\zeta^2} + 1)e^{i\theta}}{2} d\zeta, \Re \int_1^w e^{i\theta}/\zeta d\zeta \right)$$

Tal família é constituída de superfícies **isométricas** e é chamada de **associada**. O catenóide é **conjugado** ao helicóide.

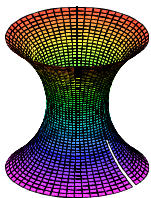
A métrica é dada por  $ds^2 = (1 + 1/|w|^2)^2 |dw|^2/4$  e não depende de  $\theta$ .

## A família mínima associada (isométrica) catenóide-helicóide

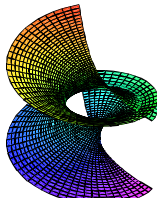
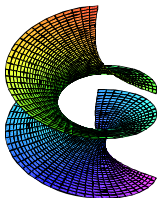
### O catenóide



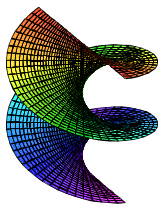
## A família catenóide-helicóide



## A família catenóide-helicóide



## O helicóide



## A equação da superfície mínima em $\mathbb{R}^3$

A equação da superfície mínima satisfeita por uma função  $z = u(x, y)$  definida num aberto  $U$  é uma E.D.P. quasilinear elíptica de segunda ordem dada por

$$(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 0$$

O famoso teorema de Bernstein do início do século 20, diz que uma solução  $z = u(x, y)$  da equação da superfície mínima, definida para todos os valores das variáveis  $x, y$  é linear, ou seja o gráfico de  $u$  é um plano de  $\mathbb{R}^3$ .

Um outro *approach* para a dedução do mesmo resultado usa o fato que a aplicação normal de Gauss  $g(z)$  é meromorfa.

O teorema de Rado diz que dada uma curva retificável  $C$  de  $\mathbb{R}^3$  que se projeta um a um no plano  $xy$ , sobre uma curva convexa, existe uma solução  $z = u(x, y)$  da eq. da sup. mínima, tal que o bordo do gráfico de  $u$  é a curva  $C$ .

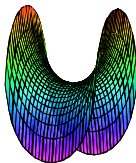
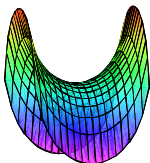
## A superfície de Scherk

- ▶ Estudando a equação da superfície mínima, Scherk nos meados do século 18, usando o **método das separação das variáveis**, encontrou sua famosa superfície dada por

$$z = \log \frac{\cos y}{\cos x}, \quad |x| < \pi/2, |y| < \pi/2$$

**Exercício:** Intua uma solução da **equação da superfície mínima** da forma  $z = f(x) + g(y)$ , substitua na equação da superfície mínima, e **obtenha Scherk!!**, usando as técnicas de cálculo IV-equações diferenciais elementares.

## Scherk



Parte de Scherk **minimiza área** dentre as superfícies que têm o mesmo **contorno**.



Parte de Scherk **minimiza área** dentre as superfícies que têm o mesmo **contorno**.



## Fórmula da primeira variação da área

Seja  $X : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão com normal unitário  $N$  e curvatura média  $H$ . Seja  $X(t, p) = X(p) + tf(p)N$  uma variação normal.

$$A'(0) = -2 \int_M f(p)H(p) \, dM$$

Concluimos:  $M$  é mínima, se para todo domínio limitado  $D$  de  $M$  tem-se que  $A'(0) = 0$  para uma deformação normal, ou uma deformação que fixa  $\partial D$ :

**Superfícies mínimas são pontos críticos do funcional área.**

## O conceito de estabilidade de uma superfície mínima de $\mathbb{R}^3$

Dizemos que um domínio  $D$  numa superfície mínima  $S$  é **estável**, se

$$A''(0) = I(f) = \int fJ(f) \, dM > 0$$

e **fracamente estável** se  $A''(0) = \int fJ(f) \, dM \geq 0$ , para toda função suave de suporte compacto em  $D$ , onde

$$J(f) := -(\Delta f - 2Kf)$$

é chamado de operador de Jacobi, sendo  $K$  a curvatura de Gauss de  $M$ .

O conceito de estabilidade está relacionado com o **primeiro valor próprio do operador de Jacobi**.

Dizemos que  $D$  é um domínio máximo fracamente estável, se  $D$  é fracamente estável e se um domínio maior não for estável.

Estamos interessados nos domínios máximos fracamente estáveis de um catenóide.

## Preliminares

Seja  $M^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada, mínima ou de curvatura média constante, com normal unitário  $N$  e com operador de Jacobi  $J := -\Delta - (4H^2 - 2K)$ , onde  $H$  é a curvatura média e  $K$  é a curvatura de Gauss.

Seja  $D$  um domínio relativamente compacto em  $M$ . Seja  $\lambda_1(J, \Omega)$  o **menor autovalor** do operador  $J$  com condições de Dirichlet de fronteira em  $\partial D$ ; isto é

$$\lambda_1(D) = \inf \left\{ \int_D f J_M(f) d\mu_M \mid f \in C_0^\infty(D), \int_M f^2 d\mu_M = 1 \right\},$$

# Estabilidade

Dizemos que o domínio  $D$  é

- ▶ **estável** se  $\lambda_1(J, D) > 0$ , and
- ▶ **fracamente estável** se  $\lambda_1(J, D) \geq 0$ .

O **índice** do domínio  $D$  é **o número de autovalores negativos** do operador  $J$  em  $D$  com condições de fronteira de Dirichlet (Tal número é finito devido à compacidade de  $\overline{\Omega}$ ).

## Critério de estabilidade

Seja  $D$  um domínio limitado. Assuma que existe uma função estritamente positiva  $u$  em  $D$  tal que  $J(u) = 0$ . Segue então que  $\lambda_1(\Omega) \geq 0$ , ou seja o domínio  $D$  é **fracamente estável**.

### Princípio de monotonicidade

Seja  $D_1 \subset D_2$  dois domínios relativamente compactos em  $M$ , tal que  $\text{int}(D_2 \setminus D_1) \neq \emptyset$ . Segue então que  $\lambda_1(D_1) > \lambda_1(D_2)$ . Em particular, se  $D_2$  é fracamente estável (*i.e.*  $\lambda_1(D_2) \geq 0$ ) e  $\text{int}(D_2 \setminus D_1) \neq \emptyset$ , então  $D_1$  é estável (*i.e.*  $\lambda_1(D_1) > 0$ ).

## Campos de Jacobi

Seja  $J$  um operador de Jacobi de uma superfície mínima ou de curvatura média constante  $M \looparrowright \mathbb{R}^3$ . Um **Campo de Jacobi** é uma função  $u$  em  $M$  tal que  $J(u) = 0$ .

Seja  $X_a : M \looparrowright (\mathbb{R}^3; \langle \cdot, \cdot \rangle)$  uma família a 1-parâmetro de imersões com normal unitário  $N(a, p)$  e curvatura média  $H(a)$ . Seja

$u(a, p) := \langle \frac{\partial X}{\partial a}(a, p), N(a, p) \rangle$ . Segue então que

$$H'(a) = \Delta u + (4H^2 - 2K)u = -J(u)$$

Assim, se  $H(a) = \text{cst}$ , então  $u$  é um **Campo de Jacobi**, isto é  $J(u) = 0$ .

Campos de Jacobi são naturalmente provenientes da geometria.

1. Seja  $\mathcal{K}$  um **Campo de Killing** em  $\mathbb{R}^3$ . Segue então que  $u_{\mathcal{K}} = \bar{g}(\mathcal{K}, N_M)$  (componente do vetor variacional na direção normal) é um campo de Jacobi em  $M$ .
2. Seja  $\psi_a : M \looparrowright \mathbb{R}^3$  uma **família de imersões mínimas ou de curvatura média constante** (com **mesma** curvatura média). Segue então que a função  $v_a = \bar{g}\left(\frac{d\psi_a}{da}, N_M\right)$  (componente do vetor variacional na direção normal) é um campo de Jacobi em  $M$ .

Em seguida, vamos focar os catenóides do espaço Euclidiano.

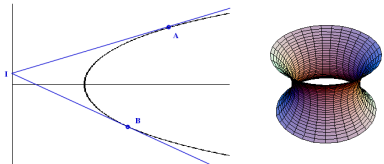
## Construção de Lindelöf's para os catenoids em $\mathbb{R}^3$

Num artigo de 1870, Lorenz Lindelöf apresentou uma construção geométrica dos domínios máximos estáveis de revolução num catenóide de  $\mathbb{R}^3$ .

A construção está ilustrada na seguinte figura.

## O enunciado de Lindelöf's

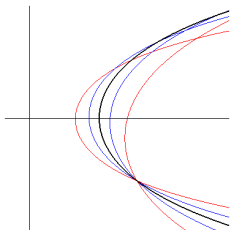
O arco  $AB$ , cujos tangentes nos pontos finais se intersectam na diretriz (eixo) tem da catenária **geram um domínio máximo de estabilidade** (fazendo a rotação em torno do eixo)



Para deduzir este enunciado, Lindelöf considerou a família

$$x(a, t) := \frac{\cosh(\alpha)}{\cosh(a)} \cosh \left( a + \frac{\cosh(a)}{\cosh(\alpha)} (t + \alpha) \right)$$

de catenárias passando no ponto  $B_\tau := (\cosh(\alpha), -\alpha)$  para um dado  $\alpha$ , digamos  $\alpha > 0$ .



A variação  $\frac{\partial x}{\partial a}(\alpha, t)$  desta família origina um **Jacobi field**  $E$  no catenóide inicial  $\mathcal{C}$  gerado por  $t \rightarrow (\cosh(t), t)$  ( $a = -\alpha$ )

$$E(t) = \tanh(\alpha)(1 - t \tanh(t)) + \tanh(t)(1 - \alpha \tanh(\alpha))$$

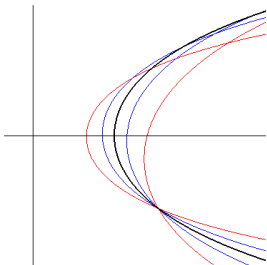
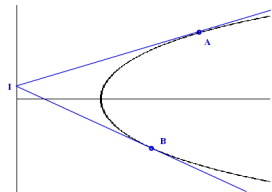
Ou, equivalentemente

$$E(t) := -\tanh(\alpha) - \tanh(t) + (t + \alpha) \tanh(\alpha) \tanh(t).$$

O arco  $A_t B_\tau$  da catenária entre os pontos  $A_t = (\cosh(t), t)$  e o ponto  $B_\tau$  gera um domínio estável se e somente se  $E$  não se anula em  $]t, \tau[$ .

O domínio máximo de estabilidade é gerado pelo arco  $A_{z(\alpha)}B_{-\alpha}$  correspondendo ao zero  $z(\alpha) > 0$  da função  $E$ : Lembre-se que  $E(-\alpha) = 0$ .

A condição  $E(z(\alpha)) = 0$  vem a ser equivalente à condição que as tangentes em  $A_{z(\alpha)}$  and  $B_{-\alpha}$  se interceptam na diretriz (eixo) da catenária.

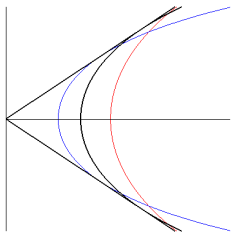


## Revisão dos catenoids em $\mathbb{R}^3$

Vamos considerar a família de catenóides  $\mathcal{C}_a$ ,  $a > 0$ , dada por

$$X(a, t, \theta) = \left( a \cosh\left(\frac{t}{a}\right) \cos \theta, a \cosh\left(\frac{t}{a}\right) \sin \theta, t \right),$$

em particular, o catenóide  $\mathcal{C}$  está dado nesta parametrização por  $X(1, t, \theta)$ .



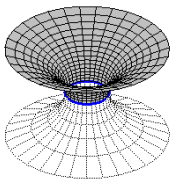
## Dedução do enunciado de Lindelöf

Vamos calcular dois campos de Jacobi no catenóide  $\mathcal{C}$  ( $a = 1$ ). O primeiro,  $v(t)$ , corresponde ao campo de Killing dado pelas translações verticais paralelas ao eixo de rotação  $t$ . O segundo  $e(t)$ , corresponde à variação da família com respeito ao parâmetro  $a$ .

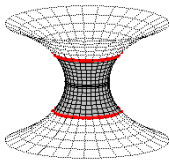
$$v(t) = \tanh(t) = \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, N(t, \theta) \right\rangle,$$

$$e(t) = 1 - t \tanh(t) = - \left\langle \frac{d}{da} X_a|_{a=1}(a, t, \theta), N(t, \theta) \right\rangle.$$

A função  $v(t) = \tanh(t)$  é positiva para  $t > 0$ . Segue então que qualquer domínio relativamente compacto contido no semi-catenóide vertical  $\mathcal{C} \cap \{z > 0\}$  é estável.

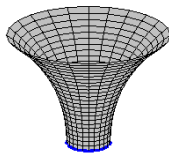
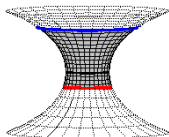


A função  $e(t) = 1 - t \tanh(t)$  é par e tem exatamente um zero positivo  $\xi_1$ . Segue então que o domínio  $X(1, ] - \xi_1, \xi_1[ , [0, 2\pi])$  é um domínio máximo fracamente estável.



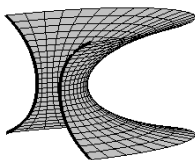
A interpretação geométrica é que os zeros de  $e(t)$  corresponde aos pontos em que a catenária toca o envelope.

Seja  $\alpha > 0$ . Usando o campo de Jacobi  $v(\alpha)e(t) + e(\alpha)v(t)$ , podemos deduzir todos os domínios máximos de estabilidade invariantes por rotação.



Como consequência, o semi-catenóide vertical é um domínio máximo de estabilidade. Chamamos esta propriedade de **Propriedade de Lindelöf**.

Usando o fato que os semi-catenóides horizontais são estáveis, pode-se mostrar que os catenóides em  $\mathbb{R}^3$  tem índice 1.



The Jacobi fields are

$$v(t) = \tanh(t) = \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, N(t, \theta) \right\rangle$$

$$h(t, \theta) = -\frac{\cos \theta}{\cosh t} = \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, N(t, \theta) \right\rangle$$

$$e(t) = 1 - t \tanh(t) = -\left\langle \frac{d}{da} X_a|_{a=1}(a, t, \theta), N(t, \theta) \right\rangle.$$

The Jacobi operator on  $\mathcal{C}$  is

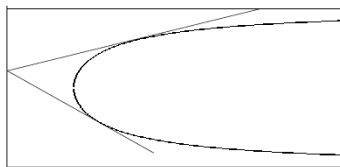
$$J_{\mathcal{C}} = -\cosh^{-2}(t) \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) - 2 \cosh^{-4}(t),$$

with radial part

$$J_{\mathcal{C}}^0 = -\cosh^{-2}(t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2 \cosh^{-4}(t) = \cosh^{-2}(t) L_{\mathcal{C}}.$$

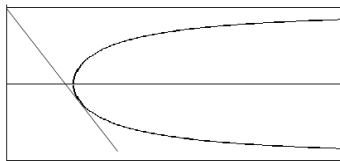
## Catenoids in $\mathbb{R}^{n+1}$ , $n \geq 3$

Using the above method we can prove that Lindelöf's tangent construction holds mutatis mutandis for  $n$ -catenoids in  $\mathbb{R}^{n+1}$ .



The tangent construction shows that for  $n \geq 3$ , half-vertical  $n$ -catenoids **are not** maximal weakly stable domains.

For  $n \geq 3$ , the  $n$ -catenoids in Euclidean space **do not satisfy** Lindelöf's property.



## Catenoids in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

There exists a family  $\{\mathcal{C}_a\}_{a>0}$  of minimal surfaces of rotation in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  (catenoids). They are given by the parametrization

$$X(a, s, \theta) = \begin{pmatrix} \tanh(R(a, s)/2) \cos \theta \\ \tanh(R(a, s)/2) \sin \theta \\ \Lambda(a, s) \end{pmatrix}$$

where  $s$  is the arc-length parameter along the generating curves.

The functions  $R(a, s)$  and  $\Lambda(a, s)$  are respectively even and odd, and given by the formulas

$$R(a, s) = a + \cosh(a) \int_0^s \sinh(t) (\cosh^2(a) \cosh^2(t) - 1)^{-1/2} dt,$$

and

$$\Lambda(a, s) = \sinh(a) \int_0^s (\cosh^2(a) \cosh^2(t) - 1)^{-1/2} dt.$$

As in the Euclidean case, we consider the **vertical Jacobi field**  $v(a, s)$  and the **variation Jacobi field**  $e(a, s)$ ,

$$v(a, s) = \widehat{g}(N(a, s, \theta), \frac{\partial}{\partial t}),$$

$$e(a, s) = \widehat{g}(N(a, s, \theta), \frac{\partial X}{\partial a}(a, s, \theta)).$$

A straight-forward computation gives,

$$v(a, s) = \cosh(a) \sinh(s) (\cosh^2(a) \cosh^2(s) - 1)^{-1/2}$$

and

$$e(a, s) = f(a, s) - v(a, s) \int_0^s B(a, t) dt,$$

where

$$f(a, s) = \sinh^2(a) \cosh(s) (\cosh^2(a) \cosh^2(s) - 1)^{-1},$$

$$B(a, t) = \cosh(a) \sinh^2(t) (\cosh^2(a) \cosh^2(t) - 1)^{-3/2}.$$

In particular,

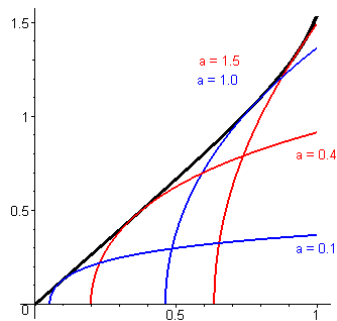
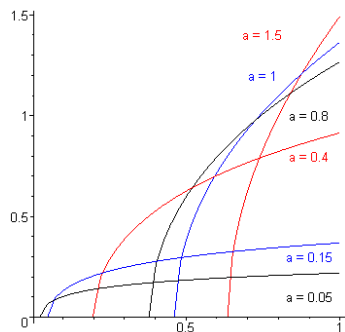
$$\begin{aligned} v(a, 0) &= 0 \quad \text{and} \quad v(a, \infty) = 1, \\ e(a, 0) &= 1 \quad \text{and} \quad e(a, \infty) = -E(a), \end{aligned}$$

where  $E(a) = \int_0^\infty B(a, t) dt$  is finite, positive. We can prove the following result.

## Proposition

- ▶ The vertical half-catenoids  $\mathcal{C}_a \cap \{t > 0\}$  in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  are weakly stable.
- ▶ To the unique positive zero of  $e(a, \cdot)$  corresponds a maximal symmetric stable domain  $X(a, ] - z(a), z(a)[, [0, 2\pi])$ .
- ▶ The catenoids  $\mathcal{C}_a$  have index 1.

As in the Euclidean space, the maximal symmetric stable domain  $X(a, ] - z(a), z(a)[, [0, 2\pi[)$  corresponds to the points at which the catenoids touch their envelope.



## Theorem

The half-catenoids  $\mathcal{C}_a \cap \{t > 0\}$  are not maximally weakly stable. More precisely, there exists a unique  $\ell(a) \in ]0, z(a)[$  such that the domain  $X(a, ] - \ell(a), \infty[, [0, 2\pi])$  is maximally stable among all rotationally symmetric domains. The catenoids in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  do not satisfy Lindelöf's property.

**Proof.** For a given  $\alpha > 0$ , consider the Jacobi field

$$e(a, \alpha, s) := v(a, \alpha)e(a, s) + e(a, \alpha)v(a, s).$$

## Generalizations

The method of Jacobi fields described above is quite versatile and can be applied to other situations: higher dimensions, catenoids and catenoid-cousins in hyperbolic space, *etc.* We are currently investigating other cases (such as constant mean curvature  $\frac{1}{2}$  rotation surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ).

$\mathbb{H}^3$ 

Minimal catenoids in  $\mathbb{H}^3$  have been studied by H. Mori (1981), M. do Carmo - M. Dajzcer (1983) and K. Seo (2009).

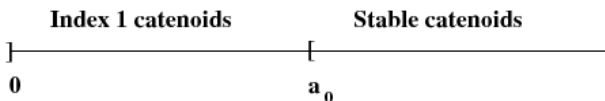
They showed that some hyperbolic catenoids are stable while others have index 1.

Using the Jacobi field method, we can give the following precise analysis.

## Hyperbolic catenoids, precise analysis

The minimal catenoids in  $\mathbb{H}^3$  form a 1-parameter family  $\{\mathcal{C}_a\}_{a>0}$  with the following properties.

- ▶ There exists a function  $E(a)$  such that for  $E(a) \leq 0$  the catenoid is stable and for  $E(a) > 0$  the catenoid is unstable.

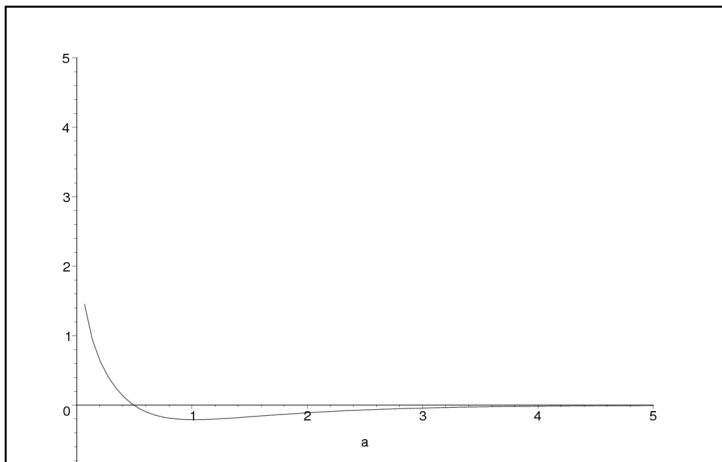


For  $0 < a < a_0 \approx 0,4955\dots$ ,  
the catenoids  $\mathcal{C}_a$  have index 1.

For  $a \geq a_0$  the catenoids  $\mathcal{C}_a$  are  
(globally) stable.

The half-catenoids  $\mathcal{C}_{a,\pm}$  are not maximally stable. The hyperbolic catenoids **do not satisfy** Lindelöf's property.

The critical point  $a_2$  is the only zero of the function  $E(a)$  whose graph is given below (MAPLE plot).



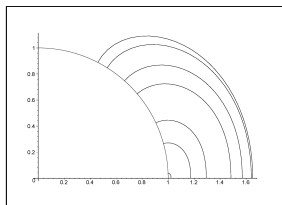
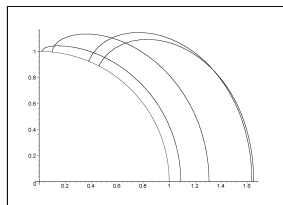
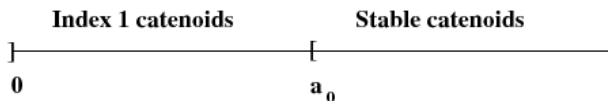
$$e(a, s) =$$

$$\frac{\sinh^2 2a \cosh 2s}{\cosh^2 2a \cosh^2 2s - 1} -$$

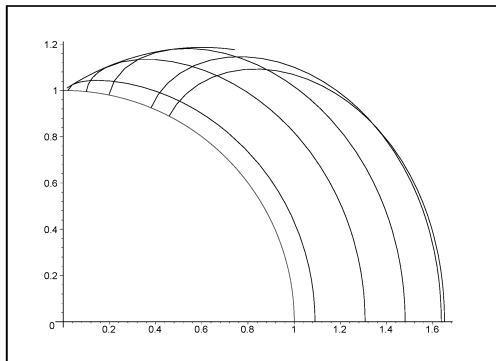
$$\frac{\cosh 2a \sinh 2s}{\sqrt{\cosh 2a \cosh 2s - 1}} \int_0^s \frac{\cosh^2 2u \cosh 2a (2 - \sinh^2 2a) + \cosh 2u \sinh^2 2a - 2 \cosh 2a}{(\cosh 2a \cosh 2u + 1)^2 (\cosh 2a \cosh 2u - 1)^{3/2}} du$$

$$E(a) := \int_0^\infty \frac{\cosh^2 2t \cosh 2a (2 - \sinh^2 2a) + \cosh 2t \sinh^2 2a - 2 \cosh 2a}{(\cosh 2a \cosh 2t + 1)^2 (\cosh 2a \cosh 2t - 1)^{3/2}} dt$$

The stability properties of hyperbolic catenoids have a nice geometric interpretation.



Index 1 catenoids have an envelope.



## Other results

The same method applies to constant mean curvature  $H$  rotation surfaces in  $\mathbb{H}^3$ , for  $0 \leq H < 1$ .

- ▶ For rotation surfaces with constant mean curvature  $H$  in  $\mathbb{H}^3$ ,  $0 < H < 1$ , the picture is the same as for  $H = 0$ .

## Further investigations with the same geometric approach

Surfaces with mean curvature 1 in hyperbolic space  $\mathbb{H}^3$  are "cousin" of the minimal surfaces in Euclidean space with whom they **share** several geometric properties.

In fact, given a conformal **minimal** immersion  $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$  (given by the **Weierstrass representation**), where  $\Omega$  is simply connected, there is an **associate** (isometric) conformal immersion  $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}^3$  with mean curvature **1**. This follows from the Gauss and Mainardi-Codazzi equations and the fundamental theorem in surface theory.

It is natural to ask if the **embedded rotational "catenoid cousin"** in  $\mathbb{H}^3$  have the Lindelöf property. The answer is **Yes**, as we will explain in the following.