1º EXAME DE ANÁLISE REAL

prof. Ricardo Sá Earp *4 de outubro de 2002*

Escreva com apuro a sua resposta, colocando todos os desenvolvimentos
Justifique cabal e completamente as suas afirmações

1ª Questão (4 pts):

Responda verdadeiro ou falso. Caso verdadeiro escreva uma dedução rigorosa, caso falso dê um contra-exemplo.

a) Considere $\{a_n\}, \{b_n\} \quad n \in \mathbb{N}$ duas seqüências de números reais satisfazendo $0 < a_n < 1 \quad \text{e} \quad 0 < b_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e $a_n + b_n = 1$. Defina a seqüência $\{A_n\}$ por

$$A_n = \frac{(a_n + b_n)^{a_n + b_n}}{a_n^{a_n}\ b_n^{b_n}}$$

Temos então que sempre existe uma subseqüência $\{A_{n_j}\}$ de $\{A_n\}$ e um número real λ satisfazendo $0 \leqslant \lambda \leqslant 2$, tal que $A_{n_j} \to \lambda$ (quando $j \to \infty$)

b) Duas métricas num espaço vetorial normado de dimensão infinita são sempre equivalentes.

c) Se uma série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, converge normalmente num intervalo $|x - c| \leqslant a, \quad a > 0$, então a série converge absolutamente neste mesmo intervalo.

d) O fecho da bola unitária num espaço de Banach é sempre compacto.

2ª Questão (2 pts):

Mostre com todos os detalhes que $l^2(\mathbb{R})$ é um espaço de Banach.

3ª Questão (2 pts):

Seja $a > 0$ um número real positivo fixado. Considere a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a^n z^{3^n}$$

a) Determine o raio de convergência da série.
b) Determine uma condição suficiente sobre a para que a série convirja normalmente no intervalo $|x| \leqslant 1$.

4ª Questão (2 pts):

Sejam $a_1, \dots a_n$ são números positivos de soma s. Mostre que

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \cdots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geqslant n\left(\frac{s}{n} + \frac{n}{s}\right)^2$$