

2º EXAME DE ANÁLISE REAL

prof. Ricardo Sá Earp

14 de novembro de 2002

*Escreva com apuro a sua resposta, colocando todos os desenvolvimentos
Justifique cabal e completamente as suas afirmações
O entendimento das definições envolvidas faz parte das questões*

1ª Questão (2.5 pts):

a) Considere o intervalo $I = (2^{-2002}, 2^{2003})$. Mostre que

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad n \geq 1$$

converge uniformemente em I .

i) Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n + 2^n}\right)^{2^n (\cos(1/n))^{1/\tan(1/n)}}$$

2ª Questão (2.5 pts):

Mostre rigorosamente que toda função semi-contínua inferiormente definida num espaço métrico compacto X assume o mínimo em X .

3ª Questão (2.5 pts):

Seja $y = f(x)$ uma função positiva de classe C^2 no intervalo $[0, \infty)$. Suponha que $y(0) = \tau > 0$, e que $y'(0) = 0$. Assuma ainda que $y(x)$ é uma função estritamente convexa, i.e $y''(x) > 0$. Suponha que para certo $A > 0$, y satisfaça a desigualdade diferencial

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \leq \frac{1}{y(1 + y'^2)^{1/2}} + \frac{A}{y^2(1 + y'^2)}$$

a) Mostre que a função

$$\frac{1}{2} \log(1 + y'^2) - \log y + \frac{A}{y}$$

é estritamente decrescente em (x_0, x_1) , $x_0 > 0$. Deduza que existem constantes $b > 0$ e c tal que

$$y(x) < c e^{bx}$$

4ª Questão (2.5 pts):

Seja f uma função real definida num intervalo I de comprimento $2l$. Assuma que f é duas vezes diferenciável em I . Além disso, suponha que f e f'' sejam limitadas. Seja $M_0 = \sup_{x \in I} |f(x)|$ e $M_2 = \sup_{x \in I} |f''(x)|$.

a) Seja x_0 um ponto interior de I e seja λ um número real positivo tal que o intervalo $J = J(x_0, \lambda) = [x_0 - \lambda, x_0 + \lambda]$ seja contido no interior de I . Mostre que

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{\lambda} + \lambda M_2, \quad \forall x \in J$$