$2^{\underline{o}}$ EXAME DE ANÁLISE REAL

prof. Ricardo Sá Earp *14 de novembro de 2002*

Escreva com apuro a sua resposta, colocando todos os desenvolvimentos
Justifique cabal e completamente as suas afirmações
O entendimento das definições envolvidas faz parte das questões

$1^{\underline{a}}$ Questão (2.5 pts):

a) Considere o intervalo $I = (2^{-2002}, 2^{2003})$. Mostre que

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \qquad n \geqslant 1$$

converge uniformemente em I.

i) Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+2^n}\right)^{2^n\,(\cos(1/n))^{1/tan(1/n)}}$$

$2^{\underline{a}}$ Questão (2.5 pts):

Mostre rigorosamente que toda função semi-contínua inferiormente definida num espaço métrico compacto X assume o mínimo em X.

$3^{\underline{a}}$ Questão (2.5 pts):

Seja $y = f(x)$ uma função positiva de classe C^2 no intervalo $[0, \infty)$. Suponha que $y(0) = \tau > 0$, e que $y'(0) = 0$. Assuma ainda que $y(x)$ é uma função estritamente convexa, i.e $y''(x) > 0$. Suponha que para certo $A > 0$, y satisfaça a desigualdade diferencial

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \leqslant \frac{1}{y(1+y'^2)^{1/2}} + \frac{A}{y^2(1+y'^2)}$$

a) Mostre que a função

$$\frac{1}{2}\log(1+y'^2) - \log y + \frac{A}{y}$$

é estritamente decrescente em (x_0, x_1), $\quad x_0 > 0$. Deduza que existem constantes $b > 0$ e c tal que

$$y(x) < c\,\mathrm{e}^{bx}$$

4ª Questão (2.5 pts):

Seja f uma função real definida num intervalo I de comprimento $2l$. Assuma que f é duas vezes diferenciável em I. Além disso, suponha que f e f'' sejam limitadas. Seja $M_0 = \sup_{x\in I} |f(x)|$ e $M_2 = \sup_{x\in I} |f''(x)|$.

a) Seja x_0 um ponto interior de I e seja λ um número real positivo tal que o intervalo $J = J(x_0, \lambda) = [x_0 - \lambda, x_0 + \lambda]$ seja contido no interior de I. Mostre que

$$|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{\lambda} + \lambda M_2, \qquad \forall x \in J$$