3º EXAME DE ANÁLISE REAL

prof. Ricardo Sá Earp *10 de dezembro de 2002*

Escreva com apuro a sua resposta, colocando todos os desenvolvimentos
Justifique cabal e completamente as suas afirmações
O entendimento das definições envolvidas faz parte das questões

1ª Questão (2.5 pts):

Discuta rigorosamente a existência ou não existência dos limites abaixo:

a) Dado $\alpha > 0$, analise

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^N \frac{x \sin(\alpha x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$$

b) Analise

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^N \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$$

2ª Questão (2.5 pts):

Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções reais de classe C^1 definidas num intervalo aberto I. Assuma que a seqüência de derivadas $\{f_n'\}$ seja uniformemente localmente limitada em I. Assuma também que a tal seqüência $\{f_n\}$ seja uniformemente localmente limitada em I. Seja f uma função definida em I tal que toda subseqüência $\{f_{n_j}\}$ que converge sobre todo compacto de I possui f como limite. Mostre que $f_n \to f \quad (n \to \infty)$, uniformemente em todo compacto de I.

3ª Questão (2.5 pts):

Considere

$$c_n := \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, \mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{N}$$

Defina a seqüência de funções $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t| \geqslant 1 \\ \dfrac{(1-t^2)^n}{c_n} & \text{se } t \in [-1,1] \end{cases}$$

a) Será que $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$?

b) Será que dado $0 < \delta < 1$, $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente em $|t| \geqslant \delta$?

4ª Questão (2.5 pts):

Considere a seqüência de funções contínuas

$f_n(x) = nx(1-x)^n, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

a) Discuta a convergência pontual e a convergência uniforme da seqüência.

b) Discuta a limitação uniforme da seqüência.