

ANÁLISE REAL-2002.2-Lista1

Professor: Ricardo Sá Earp

Números reais, certas desigualdades clássicas e aplicações

x Um raciocínio relativamente fácil calcado nos resultados do curso básico de Cálculo de uma variável real, ou melhor, que pode ser inferido de certas desigualdades elementares (essencialmente a desigualdade entre a média aritmética e geométrica, deduzida na sala de aula) leva às seguintes desigualdades fundamentais:

Teorema Se $x \geq -1$, e $0 < \alpha < 1$, então

$$(1) \quad (1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$$

se $\alpha < 0$ ou $\alpha > 1$, então

$$(2) \quad (1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$$

Sendo que a igualdade nestas desigualdades ocorre se e somente se $x = 0$.

Uma outra forma útil das desigualdades acima é a seguinte:

$$(4) \quad y^\alpha \leq 1 - \alpha + \alpha y \quad \text{se } y \geq 0 \text{ e } 0 < \alpha < 1$$

$$(5) \quad y^\alpha \geq 1 - \alpha + \alpha y \quad \text{se } y \geq 0 \text{ e } \alpha > 1 \text{ ou } \alpha < 0$$

Sendo que a igualdade nestas desigualdades ocorre se e somente se $y = 1$.

1) Para $\alpha > 0$, considere as seguintes desigualdades

$$\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < \sum_{k=1}^n k^\alpha < \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

para $-1 < \alpha < 0$

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} < \sum_{k=1}^n k^\alpha < \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

a) Demonstre as desigualdades acima usando *obrigatoriamente* um argumento por indução combinado com o uso das desigualdades (1) e (2) do início da lista.

- b) Demonstre as desigualdades acima usando *obrigatoriamente* somas de Riemann.
- c) Você saberia dar uma demonstração das desigualdades acima usando *convexidade*? (exploraremos bastante este conceito mais adiante no curso).
- 2) Assuma o seguinte resultado do Cálculo de uma variável real que ainda discutiremos posteriormente no curso:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

- a) Demonstre usando o teorema do binômio que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad n = 1, 2, \dots$$

Conclua que $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e^n$.

- b) Aplique o resultado anterior para demonstrar que

$$n! > \frac{(1+n)^n}{e^n}$$

O teorema do binômio também pode ser usado para demonstrar a seguinte desigualdade

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

- c) Relembrando o conceito de seqüência de números reais que exploraremos nas próximas aulas mostre as seqüências $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, e $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, são respectivamente crescentes e decrescentes, concluindo com o que foi dito

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Infira que as seqüências $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tem como limite o número e ; além disso conclua que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > e$$

d) Usando os resultados anteriores mostre que

$$n! < \frac{(1+n)^{n+1}}{e^n}$$

Nota: Estimativas bem melhores podem ser obtidas pela chamada *fórmula de Stirling* que faz uso da função Gamma (denotada $\Gamma(z)$) cujo estudo faremos mais adiante no curso. A fórmula de Stirling diz o seguinte:

$$\Gamma(n+1) = n! = \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n+\alpha_n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

onde $\alpha_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). À guisa de informação cultural queremos dizer agora o seguinte: A função $\Gamma(z)$ é a *continuação analítica* da função fatorial, sendo uma função meromorfa em \mathbb{C} cujos pólos são os inteiros negativos (incluindo 0); cada pólo $-n$ é simples de resíduo $\frac{(-1)^n}{n!}$.

3) Para x e y números reais positivos, mostre que

$$(xy^n)^{1/(n+1)} < \frac{x+ny}{1+n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

a menos que $x = y$.

4) Mostre que

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad n = 1, 2, \dots$$

5) Mostre que se x_1, \dots, x_n são números reais positivos que

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right) \geq n^2$$

sendo que a igualdade é válida se e somente se $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

6) Apresente pelo menos duas demonstrações do seguinte fato: Se x, y, z são números reais positivos, e se $x^4 + y^4 + z^4 = 27$, então $x + y + z \leq 3\sqrt{3}$.

7) Mostre usando o seu conhecimento do Cálculo I, ou melhor aplicando desigualdades elementares que você verá adiante, combinado com desigualdades fundamentais vistas acima, que se $x > 0$ e $n > 1$ que

$$\frac{x}{n+x(n-1)} < (x+1)^{1/n} - 1 < \frac{x}{n}$$

Que informação você pode deduzir da desigualdade sobre o limite de $\sqrt[n]{a}$ ($a > 0$), quando $n \rightarrow \infty$?

8) Mostre que se x, y, z são números reais positivos então

$$\frac{9xyz}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leq xyz(x + y + z) \leq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$$

9) Sejam x, y números reais satisfazendo $x \geq y > 0$ e $x + y = 1$. Aplique estimativas clássicas, combinadas com técnicas usuais do Cálculo Diferencial, ou melhor ainda desigualdades baseadas essencialmente nas médias, para deduzir que

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

Generalize: Se a_1, \dots, a_n são números positivos de soma s então

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \dots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geq n \left(\frac{s}{n} + \frac{n}{s}\right)^2$$

10) Mostre que se x, y, z são números reais positivos então

$$(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz$$

11) O seguinte resultado tem uma demonstração que me parece bem interessante, já que é uma combinação esperta do uso de certa desigualdade clássica combinado com um argumento recursivo, no qual aparece naturalmente a série geométrica $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$. Demonstre que para $x \geq y > 0$ tem-se

$$(x + y)(x^3 + y^3)(x^7 + y^7) \leq 4(x^{11} + y^{11})$$

12) Mostre usando desigualdade clássica que se x, y, z são números reais positivos satisfazendo $x^3 + y^3 = z^3$ que

$$\left(\frac{xy}{z^2}\right)^3 \leq \frac{1}{4}$$

13) Mostre usando desigualdade clássica que se $0 < x < \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$

$$(1 + x)^n < \frac{1}{(1 - nx)}$$

- 14) A próxima desigualdade é devida a Tchebychef. Se $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$, e $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$, então

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Para poder demonstrar esta desigualdade proceda da seguinte maneira:

- Verifique a desigualdade quando $n = 2, 3$, prestando atenção numa certa desigualdade elementar que aparece nesta verificação
 - De posse da desigualdade obtida pela intuição adquirida no item a), mostre o resultado geral.
- 15) Levando em conta a série de Taylor da função cosseno, isto é

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \dots$$

mostre que

$$0 < 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2 \cdot 10^4} \quad \text{se } n > 100$$

- 16) Use cálculo diferencial básico de uma variável real para mostrar que se $x > 1$, então

$$x^{1/100} > \ln x$$

- 17) Mostre usando o conhecimento da função exponencial (você fica proibido de usar neste exercício a regra de l'Hôpital) que para p, q positivos vale

$$e^{x^p} > x^q$$

para x suficientemente grande

- 18) Para o próximo exercício você vai precisar do conhecimento do conceito de *convexidade*. Mostre que para $x > y > 0$ positivos e $p > 1$ vale

$$(x + y)^p < 2^{p-1}(x^p + y^p)$$

Você poderia generalizar a desigualdade acima para n números ?

- 19) Use a desigualdade (4) para mostrar que se $0 < \alpha < 1$ e se a, b são não negativos então

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha)b$$

Quando x e y são positivos, satisfazendo $x + y = 1$, fazendo $\alpha = x$ e $1 - \alpha = y$, obtenha

$$(6) \quad a^x b^y \leq xa + yb$$

sendo que a igualdade é válida, se e só se $a = b$. Mostre que a desigualdade (6) pode ser escrita da seguinte forma

$$(7) \quad a^\alpha - b^\alpha < ab^{\alpha-1}(a - b), \quad 0 < \alpha < 1$$

formulação esta que é deveras útil como você já deve ter observado nos exercícios anteriores.

A desigualdade (6) é suficientemente importante para apresentarmos uma demonstração para um número n de números reais positivos a_1, \dots, a_n e números positivos x_1, x_2, \dots, x_n , satisfazendo $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Afirmamos que neste caso vale também

$$(8) \quad a_1^{x_1} a_2^{x_2} \cdots a_n^{x_n} \leq \sum_{i=1}^n x_i a_i$$

Imbutida na desigualdade acima está a idéia de *convexidade* que você verá proximamente. Vamos prosseguir com uma demonstração por indução. Suponhamos que a propriedade esteja demonstrada para m (ou menor) números. Seja x_1, \dots, x_{m+1} números positivos satisfazendo $x_1 + x_2 + \dots + x_{m+1} = 1$. Coloquemos $x_1 + x_2 + \dots + x_m = \sigma$. Segue que

$$\begin{aligned} a_1^{x_1} a_2^{x_2} \cdots a_m^{x_m} a_{m+1}^{x_{m+1}} &= \left(a_1^{x_1/\sigma} a_2^{x_2/\sigma} \cdots a_m^{x_m/\sigma} \right)^\sigma a_{m+1}^{x_{m+1}} \\ &\leq \left(a_1^{x_1/\sigma} a_2^{x_2/\sigma} \cdots a_m^{x_m/\sigma} \right) \sigma + a_{m+1} x_{m+1} \end{aligned}$$

usando a propriedade para o caso de dois números. O argumento fica finalizado aplicando a hipótese de indução. Sendo que a igualdade é verificada se e somente se todos os números a_i são iguais.

20) Mostre a desigualdade de Young, usando o item anterior: Se a, b são positivos, e se p, q com $p > 1$ satisfazem $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

sendo que vale a igualdade se e só se $a^p = b^q$.

21) Mostre que se $a \geq b > 0$, e $a + b = 1$, então

$$a^a b^b \geq \frac{(a+b)^{a+b}}{2}$$

22) Mostre o seguinte resultado de Bohr. Se $c > 0$ então

$$|a+b|^2 \leq (1+c)|a|^2 + \left(1 + \frac{1}{c}\right)|b|^2$$

Vamos agora demonstrar a clássica desigualdade de Hölder. sejam p, q números reais positivos, satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se a_1, \dots, a_n e b_1, \dots, b_n são não negativos, então

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}$$

sendo que a igualdade é válida se e somente se $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$, ou $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \dots = a_n/b_n$. O caso especial em que $p = q = 2$ é famoso e chamado de desigualdade de Cauchy. A demonstração usa a desigualdade (6) fazendo

$$a := \frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p} \text{ e } b := \frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q}$$

23) Complete a demonstração da desigualdade de Hölder, como exercício.

Para completar esta lista vamos tratar um pouco números racionais, irracionais e enumerabilidade.

24) Considere $S_n^{(m)}$ as somas das m -ésimas potências dos n primeiros números naturais, ou seja

$$S_n^{(m)} := 1^m + 2^m + \dots + n^m.$$

a) Mostre de pelo menos três maneiras distintas as seguintes identidades para $S_n^{(2)}$ e $S_n^{(3)}$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

- b) Mostre que $S_n^{(m+1)}$ é um polinômio de grau $m + 1$ sem coeficientes constantes, cuja soma dos coeficientes é 1.
- 25) Mostre que o conjunto dos números reais algébricos é enumerável.
- 26) Mostre que o número $\sqrt[3]{26 + \sqrt{9 \times 3 \times 25}}$ se escreve da forma $x + y\sqrt{3}$, onde x e y são inteiros.
- 27) Decida qual é o maior dentre os números $5^{\sqrt{6}}$ e $6^{\sqrt{5}}$, usando identidades e desigualdades elementares.
- 28) Mostre que todo conjunto aberto em \mathbb{R} é a união de uma coleção no máximo enumerável de conjuntos abertos disjuntos.

BIBLIOGRAFIA SUCINTA

1. Elon Lages Lima. *Curso de Análise Volume 1*. Projeto Euclides, 1995.
2. Emil Artin. *The Gamma Function*. Holt, Rinehart and Winson, Inc. 1964.
3. Ivan Niven. *Numbers Rational and Irrational*. Random ouse Inc. 1961.
4. G. H. Hardy, J. E. Littlewood e G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge Press , 1973.
5. Henri Mascal e Marius Stoka. *Fonctions d'une Variable Réele*. PF, 1986.
6. Nicholas D. Kazarinoff. *Analytic Inequalities*. Holt, Rinehart and Winson, Inc. 1961.
7. Ralph P. Boas, Jr. *A Primer of Real Functions*. Math. Assoc. of Amer. John Wiley and Sons, Inc. 1960. 8. Walter Rudin. *Princípios de Análise Matemática*. Livro Técnico, N, 1971.