ANÁLISE REAL-2002.2–Lista1

Professor: Ricardo Sá Earp

Números reais, certas desigualdades clássicas e aplicações

x Um raciocínio relativamente fácil calcado nos resultados do curso básico de Cálculo de uma variável real, ou melhor, que pode ser inferido de certas desigualdades elementares (essencialmente a desigualdade entre a média aritmética e geométrica, deduzida na sala de aula) leva às seguintes desigualdades fundamentais:

Teorema Se $x \geqslant -1$, e $0 < \alpha < 1$, então

$$(1+x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x \tag{1}$$

se $\alpha < 0$ ou $\alpha > 1$, então

$$(1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x \tag{2}$$

Sendo que a igualdade nestas desigualdades ocorre se e somente se $x = 0$.

Uma outra forma útil das desigualdades acima é a seguinte:

$$y^\alpha \leqslant 1 - \alpha + \alpha y \qquad \text{se } y \geqslant 0 \text{ e } 0 < \alpha < 1 \tag{4}$$

$$y^\alpha \geqslant 1 - \alpha + \alpha y \qquad \text{se } y \geqslant 0 \text{ e } \alpha > 1 \text{ ou } \alpha < 0 \tag{5}$$

Sendo que a igualdade nestas desigualdades ocorre se e somente se $y = 1$.

1) Para $\alpha > 0$, considere as seguintes desigualdades

$$\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < \sum_{k=1}^{n} k^\alpha < \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

para $-1 < \alpha < 0$

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} < \sum_{k=1}^{n} k^\alpha < \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

a) Demonstre as desigualdades acima usando *obrigatoriamente* um argumento por indução combinado com o uso das desigualdades (1) e (2) do início da lista.

b) Demonstre as desigualdades acima usando *obrigatoriamente* somas de Riemann.

c) Você saberia dar uma demonstração das desigualdades acima usando *convexidade* ? (exploraremos bastante este conceito mais adiante no curso).

2) Assuma o seguinte resultado do Cálculo de uma variável real que ainda discutiremos posteriormente no curso:

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

a) Demonstre usando o teorema do binômio que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Conclua que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < \mathrm{e}^n$.

b) Aplique o resultado anterior para demonstrar que

$$n! > \frac{(1+n)^n}{\mathrm{e}^n}$$

O teorema do binômio também pode ser usado para demonstrar a seguinte desigualdade

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

c) Relembrando o conceito de seqüência de números reais que exploraremos nas próximas aula mostre as seqüência $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, e $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, são respectivamente crescentes e descrescente, concluindo com o que foi dito

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Infira que as seqüências $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tem como limite o número e; além disso conclua que

$$(1 + \frac{1}{n})^{n+1} > \mathrm{e}$$

d) Usando os resultados anteriores mostre que

$$n! < \frac{(1+n)^{n+1}}{e^n}$$

Nota: Estimativas bem melhores podem ser obtidas pela chamada *fórmula de Stirling* que faz uso da função Gamma (denotada $\Gamma(z)$) cujo estudo faremos mais adiante no curso. A fórmula de Stirling diz o seguinte:

$$\Gamma(n+1) = n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2}\, e^{-n+\alpha_n}, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

onde $\alpha_n \to 0$ $(n \to \infty)$. À guisa de informação cultural queremos dizer agora o seguinte: A função $\Gamma(z)$ é a *continuação analítica* da função fatorial, sendo uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ cujos pólos são os inteiros negativos (incluindo 0); cada pólo $-n$ é simples de resíduo $\dfrac{(-1)^n}{n!}$.

3) Para x e y números reais positivos, mostre que

$$(xy^n)^{1/(n+1)} < \frac{x+ny}{1+n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

a menos que $x = y$.

4) Mostre que

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \qquad n = 1, 2, \ldots$$

5) Mostre que se $x_1, \ldots, x_n$ são números reais positivos que

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right) \geqslant n^2$$

sendo que a igualdade é válida se e somente se $x_1 = x_2 = \cdots x_n$.

6) Apresente pelo menos duas demonstrações do seguinte fato: Se x, y, z são números reais positivos, e se $x^4 + y^4 + z^4 = 27$, então $x + y + z \leqslant 3\sqrt{3}$.

7) Mostre usando o seu conhecimento do Cálculo I, , ou melhor aplicando desigualdades elementares que você verá adiante, combinado com desigualdades fundamentais vistas acima, que se $x > 0$ e $n > 1$ que

$$\frac{x}{n + x(n-1)} < (x+1)^{1/n} - 1 < \frac{x}{n}$$

Que informação você pode deduzir da desigualdade sobre o limite de $\sqrt[n]{a}$ $(a > 0)$, quando $n \to \infty$?

8) Mostre que se x, y, z são números reais positivos então

$$\frac{9xyz}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leqslant xyz(x + y + z) \leqslant x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$$

9) Sejam x, y números reais satisfazendo $x \geqslant y > 0$ e $x + y = 1$. Aplique estimativas clássicas, combinadas com técnicas usuais do Cálculo Diferencial, ou melhor ainda desigualdades baseadas esssencialmente nas médias, para deduzir que

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}$$

Generalize: Se $a_1, \ldots a_n$ são números positivos de soma s então

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \cdots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geqslant n\left(\frac{s}{n} + \frac{n}{s}\right)^2$$

10) Mostre que se x, y, z são números reais positivos então

$$(x + y)(y + z)(z + x) \geqslant 8xyz$$

11) O seguinte resultado tem uma demonstração que me parece bem interessante, já que é uma combinação esperta do uso de certa desigualdade clássica combinado com um argumento recursivo, no qual aparece naturalmente a série geométrica $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1$. Demonstre que para $x \geqslant y > 0$ tem-se

$$(x + y)(x^3 + y^3)(x^7 + y^7) \leqslant 4(x^{11} + y^{11})$$

12) Mostre usando desigualdade clássica que se x, y, z são números reais positivos satisfazendo $x^3 + y^3 = z^3$ que

$$\left(\frac{xy}{z^2}\right)^3 \leqslant \frac{1}{4}$$

13) Mostre usando desigualdade clássica que se $0 < x < \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$

$$(1 + x)^n < \frac{1}{(1 - nx)}$$

14) A próxima desigualdade é devida a Tchebychef. Se $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots a_n \geqslant 0$, e $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n \geqslant 0$, então

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Para poder demonstrar esta desigualdade proceda da seguinte maneira:

a) Verifique a desigualdade quando $n = 2, 3$, prestando atenção numa certa desigualdade elementar que aparece nesta verificação

b) De posse da desigualdade obtida pela intuição adquirida no item a), mostre o resultado geral.

15) Levando em conta a série de Taylor da função cosseno, isto é

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdots$$

mostre que

$$0 < 1 - \cos(\frac{1}{n}) < \frac{1}{2 \cdot 10^4} \qquad \text{se} \quad n > 100$$

16) Use cálculo diferencial básico de uma variável real para mostrar que se $x > 1$, então

$$x^{1/100} > \ln x$$

17) Mostre usando o conhecimento da função exponencial (você fica proibido de usar neste exercício a regra de l'Hôpital) que para p, q positivos vale

$$\mathrm{e}^{x^p} > x^q$$

para x suficientemente grande

18) Para o próximo exercício você vai precisar do conhecimento do conceito de *convexidade*. Mostre que para $x > y > 0$ positivos e $p > 1$ vale

$$(x + y)^p < 2^{p-1}(x^p + y^p)$$

Você poderia generalizar a desigualdade acima para n números ?

19) Use a desigualdade (4) para mostrar que se $0 < \alpha < 1$ e se a, são não negativos então

$$a^\alpha \, b^{1-\alpha} \leqslant \alpha \, a + (1 - \alpha) b$$

Quando x e y são positivos, satisfazendo $x+y=1$, fazendo $\alpha = x$ e $1-\alpha = y$, obtenha

$$a^x b^y \leqslant xa + yb \tag{6}$$

sendo que a igualdade é válida, se e só se $a = b$. Mostre que a desigualdade (6) pode ser escrita da seguinte forma

$$a^\alpha - b^\alpha < ab^{\alpha-1}(a-b), \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{7}$$

formulação esta que é deveras útil como você já deve ter observado nos exercícios anteriores.

A desigualdade (6) é suficientemente importante para apresentarmos uma demonstração para um número n de números reais positivos $a_1, \ldots a_n$ e números positivos $x_1, x_2, \ldots x_n$, satisfazendo $x_1 + x_2 + \ldots x_n = 1$. Afirmamos que neste caso vale também

$$a_1^{x_1} a_2^{x_2} \cdots a_n^{x_n} \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \tag{8}$$

Imbutida na desigualdade acima está a idéia de *convexidade* que você verá proximamente. Vamos prosseguir com uma demonstração por indução . Suponhamos que a propriedade esteja demonstrada para m (ou menor) números . Seja $x_1, \ldots x_{m+1}$ números positivos satisfazendo $x_1 + x_2 + \cdots + x_{m+1} = 1$. Coloquemos $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = \sigma$. Segue que

$$\begin{aligned} a_1^{x_1} a_2^{x_2} \cdots a_m^{x_m} a_{m+1}^{x_{m+1}} &= \left(a_1^{x_1/\sigma} a_2^{x_2/\sigma} \ldots a_m^{x_m/\sigma}\right)^\sigma a_{m+1}^{x_{m+1}} \\ &\leqslant \left(a_1^{x_1/\sigma} a_2^{x_2/\sigma} \ldots a_m^{x_m/\sigma}\right) \sigma + a_{m+1} x_{m+1} \end{aligned}$$

usando a propriedade para o caso de dois números. O argumento fica finalizado aplicando a hipótese de indução . Sendo que a igualdade é verificada se e somente se todos os números a_i são iguais.

20) Mostre a desigualdade de Young, usando o item anterior: Se a, b são positivos, e se p, q com $p > 1$ satisfazem $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

sendo que vale a igualdade se e só se $a^p = b^q$.

21) Mostre que se $a \geqslant b > 0$, e $a + b = 1$, então

$$a^a b^b \geqslant \frac{(a+b)^{a+b}}{2}$$

22) Mostre o segunte resultado de Bohr. Se $c > 0$ então

$$|a+b|^2 \leqslant (1+c)|a|^2 + \left(1 + \frac{1}{c}\right)|b|^2$$

Vamos agora demonstrar a clássica desigualdade de Hölder. sejam p, q números reais positivos, satisfazendo $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Se $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$ são não negativos, então

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{1}^{n} a_i^q\right)^{1/q}$$

sendo que a igualdade é válida se e somente se $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, ou $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \cdots a_n/b_n$. O caso especial em que $p = q = 2$ é famoso e chamado de desigualdade de Cauchy. A demonstração usa a desigualdade (6) fazendo

$$a := \frac{a_i^p}{\sum_1^n a_i^p} \text{ e } \mathrm{b} := \frac{\mathrm{a_i^p}}{\sum_1^{\mathrm{n}} \mathrm{a_i^p}}$$

23) Complete a demonstração da desigualdade de Hölder, como exercício.

Para completar esta lista vamos tratar um pouco números racionais, irracionais e enumerabilidade.

24) Considere $S_n^{(m)}$ as somas das m-ésimas potências dos n primeiros números naturais, ou seja

$$S_n^{(m)} := 1^m + 2^m + \ldots + n^m.$$

a) Mostre de pelo menos três maneiras distintas as seguintes identidades para $S_n^{(2)}$ e $S_n^{(3)}$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

b) Mostre que $S_n^{(m+1)}$ é um polinômio de grau $m+1$ sem coeficientes constantes, cuja soma dos coeficientes é 1.

25) Mostre que o conjunto dos números reais algébricos é enumerável.

26) Mostre que o número $\sqrt[3]{26+\sqrt{9\times 3\times 25}}$ se escreve da forma $x+y\sqrt{3}$, onde x e y são inteiros.

27) Decida qual é o maior dentre os números $5^{\sqrt{6}}$ e $6^{\sqrt{5}}$, usando identidades e desigualdades elementares.

28) Mostre que todo conjunto aberto em $\mathbb{R}$ é a união de uma coleção no máximo enumerável de conjuntos abertos disjuntos.

BIBLIOGRAFIA SUCINTA

1. Elon Lages Lima. *Curso de Análise Volume 1.* Projeto Euclides, 1995.

2. Emil Artin. *The Gamma Function.*Holt, Rinehart and Winson, Inc. 1964.

3. Ivan Niven. *Numbers Rational and Irrational.* Random ouse Inc. 1961.

4. G. H. Hardy, J. E. Littlewood e G. Pólya. *Inequalities.* Cambridge Press , 1973.

5. Henri Mascart e Marius Stoka. *Fonctions d'une Variable Réele.* PF, 1986.

6. Nicholas D. Kazarinoff. *Analytic Inequalities.* Holt, Rinehart and Winson, Inc. 1961.

7. Ralph P. Boas, Jr. *A Primer of Real Functions.* Math. Assoc. of Amer. John Wiley and Sons, Inc. 1960. 8. Walter Rudin. *Princípios de Análise Matemática.* Livro Técnico, N, 1971.