

## LISTA 10 DE ANÁLISE REAL 2010

RICARDO SA EARP

### *Convergência uniforme*

- (1) Deduza que uma série de funções  $\sum f_n(x)$ ,  $x \in X$ , normalmente convergente é uniformemente convergente.

Em particular, deduza que se  $X$  é um espaço métrico, se  $f_n \in C^0(X)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , então se a série  $\sum f_n(x)$ ,  $x \in X$ , normalmente convergente, ela determina uma função contínua  $f(x) = \sum f_n(x)$ ,  $x \in X$ .

- (2) Seja  $\alpha : [0, 1] \rightarrow (-1, 1)$ , uma função contínua.

Seja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n(x), \quad x \in [0, 1] \quad (1)$$

- (a) Deduza que  $f(x)$ ,  $x \in [0, 1]$  é contínua e encontre uma fórmula “fechada”.

- (3) Seja  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real limitada. Seja  $b \in (1, \infty)$ . Defina:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta(nx)}{n^b}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

- (a) Deduza que  $f(x)$  é contínua,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

- (4) Seja  $\alpha : [0, 1] \rightarrow (-1, 1)$ , de classe  $C^1$ .

Seja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n(x)}{n}, \quad x \in [0, 1] \quad (3)$$

- (a) Deduza que  $f \in C^1([0, 1])$ .

- (b) Seja  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real de classe  $C^1$ , limitada e com derivada limitada. Seja  $b \in (1, \infty)$ . Defina:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta(nx)}{n^{b+1}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Deduza que  $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$ .

(5) RESPONDA VERDADEIRO OU FALSO EM CADA ITEM ABAIXO. CASO VERDADEIRO ESBOCE UMA DEDUÇÃO SUCINTA CORRETA E EXIBA UM EXEMPLO QUE ILUSTRE A AFIRMAÇÃO, SE FOR O CASO. CASO FALSO, EXPLICA A FALSIDADE OU EXIBA UM CONTRAEXEMPLO, CONFORME A SITUAÇÃO. JUSTIFIQUE A SUA RESPOSTA. NÃO SERÃO ACEITAS RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS CORRETAS.

(6) Lembrete: *Critério de convergência uniforme*. Seja  $X$  um conjunto e seja  $\{f_n\}$  um seqüência de funções definidas em  $X$ . Segue que  $f_n \xrightarrow{u} f$ , uniformemente em  $X$ , se e somente se  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = 0$ , para toda seqüência  $\{x_n\}$  em  $X$ .

Considere a seqüência de funções  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f_n(x) = nx(1-x)^n$ .

- (a) Segue que a seqüência  $\{f_n\}$  é uniformemente limitada (em  $[0, 1]$ ).
- (b) Segue que  $f_n$  converge pontualmente para 0 (quando  $n \rightarrow \infty$ ).
- (c) Segue que  $f_n$  converge uniformemente para 0 (quando  $n \rightarrow \infty$ ).

(d) Segue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0$ , já que  $f_n \rightarrow 0$ , uniformemente em  $[0, 1]$ .

(7) Seja  $\alpha > 0$ . Seja  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e considere  $u : [0, 1] \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left( f(s) \sin n\pi s \sin n\pi x e^{-\alpha^2 \pi^2 n^2 t} \right) ds$$

(a) Deduza que existe uma função  $K(x, s, t)$  definida em  $[0, 1] \times [0, 1] \times (0, \infty)$  de classe  $C^\infty$  tal que

$$u(x, t) = \int_0^1 K(x, s, t) f(s) ds$$

(b) Deduza que  $u(x, t)$  é de classe  $C^\infty$ .

(8) Considere a seqüência de funções  $f_n$ ,  $n \geq 2$  em  $[0, 1]$  dada por  $f_n(x) = x^n \ln x$ ,  $x \in (0, 1]$  e  $f_n(0) = 0$ , para  $n \geq 2$ .

- (a) Deduza que  $f_n(x)$  é uma função de classe  $C^1$  em  $[0, 1]$  ( $n \geq 2$ ).
- (b) Encontre os máximos e mínimos globais de  $f_n(x)$  em  $[0, 1]$  ( $n \geq 2$ ).
- (c) Verifique se  $f_n(x)$  converge pontualmente em  $[0, 1]$  e verifique se  $f_n(x)$  converge uniformemente em  $[0, 1]$ .

- (9) Seja  $a_n$  uma seqüência de números reais satisfazendo  $|a_n| \leq M n^\alpha$ , onde  $M > 0$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  são constantes. Seja

$$f(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s > 1 + \alpha.$$

- (a) Deduza que  $f(s)$  é uma função contínua, com rigor.  
 (b) Deduza que  $f(s)$  é uma função de classe  $C^\infty$  em  $(1 + \alpha, \infty)$ , com rigor, e calcule  $f^{(k)}(s)$ ,  $s > 1 + \alpha$ .

RESPONDA VERDADEIRO OU FALSO EM CADA ITEM ABAIXO. CASO VERDADEIRO ESBOCE UMA DEDUÇÃO SUCINTA CORRETA E EXIBA UM EXEMPLO QUE ILUSTRE A AFIRMAÇÃO, SE FOR O CASO. CASO FALSO, EXPLICA A FALSIDADE OU EXIBA UM CONTRAEXEMPLO, CONFORME A SITUAÇÃO. JUSTIFIQUE A SUA RESPOSTA. NÃO SERÃO ACEITAS RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS CORRETAS.

- (10) Considere a seqüência de funções  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f_n(x) = nx(1 - x^2)^n$ .

- (a) Segue que a seqüência  $\{f_n\}$  é uniformemente limitada (em  $[0, 1]$ ).  
 (b) Segue que  $f_n$  converge pontualmente para 0 (quando  $n \rightarrow \infty$ ).  
 (c) Segue que  $f_n$  converge uniformemente para 0 (quando  $n \rightarrow \infty$ ).

(d) Segue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0$ .

- (e) Seja  $0 < a < 1$ . Segue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^1 f_n(x) dx = 0$ , já que  $f_n \rightarrow 0$ , uniformemente em  $[a, 1]$ .

- (11) Seja  $f_n(x) = \frac{\sin(\sqrt{n} x^2 e^{e^x})}{n^2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- (a) Segue que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge absolutamente,  $\forall x \in \mathbb{R}$

e  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  é contínua. Justifique.

- (b) Segue que  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  é diferenciável. Caso esta afirmação seja verdadeira, encontre  $f'(x)$ , justificando.

- (12) Seja  $f_n(x) = n^\alpha x^k e^{-n^k x}$ ,  $x > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- (a) Estude, dependendo do valor de  $\alpha$ , a convergência pontual e uniforme da sequência de funções  $f_n(x) = n^\alpha x^k e^{-n^k x}$ ,  $x > 0$ .
- (b) Determine os valores de  $\alpha$  de modo que a série  $\sum f_n(x)$  seja normalmente convergente.
- (c) Determine os valores de  $\alpha$  de modo que a função  $f(x) = \sum f_n(x)$  seja de classe  $C^1$ .
- (13) Seja  $\{f_n\}$  uma sequência de funções equicontínuas em um conjunto compacto  $K$  que converge pontualmente em  $K$ . Mostre que  $f_n$  converge uniformemente em  $K$ .
- (14) Assuma que uma sequência de funções diferenciáveis  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  converge pontualmente a uma função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Assuma que a sequência das derivadas  $\{f'_n\}$  é uniformemente limitada; i.e.  $\exists M > 0; |f'_n(x)| \leq M, \forall x \in (0, 1)$ . Deduza que  $f$  é contínua.
- (15) Seja  $\kappa : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Para cada função contínua  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  considere o operador  $K(f) = g$ , onde

$$g(s) = \int_0^1 \kappa(s, t) f(t) dt, \quad \forall s \in [0, 1]$$

Agora, assuma que  $\{f_n\}$  é uma sequência de funções limitadas no espaço de Banach  $C[0, 1]$ , dotado com a norma do máximo (ou do sup), i.e.  $|f_n(x)| \leq M, \forall x \in [0, 1], \forall n$ . Deduza que  $g_n = K(f_n)$ , possui uma subsequência convergente.

Análise com rigor.

- (16) Seja  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma sequência de funções diferenciáveis definidas em um domínio  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^k$ . Assuma que
- (a) Existe um ponto  $x_0 \in \Omega$  tal que a sequência  $\{f_n(x_0)\}$  converge.
- (b) As sequências das derivadas parciais  $\{\frac{\partial f_n}{\partial x_j}, j = 1, \dots, k\}$  converge uniformemente *localmente* em  $\Omega$ , escrevemos,  $g_j(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_j}, x \in \Omega$
- Deduza que o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) := f(x)$$

existe  $\forall x \in \Omega$ , sendo o limite localmente uniforme. Além disso, deduza que  $f$  é diferenciável em  $\Omega$  e vale que  $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = g_j(x), \forall x \in \Omega$ . Conclua que se  $f_n$  é de classe  $C^1$  então  $f$  também é de classe  $C^1$ .

- (17) Deduza um resultado análogo ao do item anterior para séries.
- (18) Seja  $K$  um espaço compacto e sejam  $\{f_n\}$  e  $\{g_n\}$  seqüências de funções reais contínuas tais que  $f_n \rightarrow f$  e  $g_n \rightarrow g$ , uniformemente em  $K$ . Deduza que  $f_n g_n \rightarrow fg$  uniformemente em  $K$ . Mostre com um contraexemplo que a hipótese da compacidade não pode ser relevada.
- (19) Mostre que a seqüência de funções reais  $f_n(x) = \sin(x + n^3 + e^{n^2})$  contém uma subseqüência que converge uniformemente em qualquer subconjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}$ . *Sugestão:* Use as fórmulas trigonométricas:  $\cos z - \cos w = -2 \sin(\frac{z+w}{2}) \sin(\frac{z-w}{2})$  e  $\sin z + \sin w = 2 \sin(\frac{z+w}{2}) \cos(\frac{z-w}{2})$ .
- (20) Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua satisfazendo  $\int_a^b f(x) x^n dx = 0, n = 1, 2, \dots$ . Deduza que  $f$  é identicamente nula.
- (21) (*Teorema de Dini*) Seja  $X$  um compacto. Seja  $\{f_n\}$  uma seqüência de funções contínuas em  $X$  que converge pontualmente para uma função contínua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Assuma que  $f_n(x) \geq f_{n+1}(x), n = 1, 2, \dots$ , e cada  $x \in X$ . Mostre que  $f_n \xrightarrow{u}_X f$ , i.e  $f_n$  converge uniformemente à  $f$  em  $X$ . Mostre com um exemplo que a hipótese de compacidade é necessária.
- (22) (*O espaço de Banach  $C(K)$* ) Mostre que toda seqüência de funções limitadas que é uniformemente convergente, também é uniformemente limitada.
- (23) Seja  $K$  um conjunto compacto. Defina uma métrica no conjunto  $C(K)$  das funções reais contínuas definidas em  $K$ , de modo que uma seqüência  $f_n$  converge à  $f$  em  $C(K)$  se e somente se  $f_n$  converge uniformemente à  $f$  em  $K$ . Discuta a completude deste espaço métrico. Discuta a noção de subconjunto fechado em  $C(K)$ . Discuta a noção de subconjunto compacto deste espaço, relacionando com o teorema de Arzelà-Ascoli.
- (24) Seja  $C([a, b])$  o espaço das funções contínuas definidas no intervalo  $[a, b]$  com a norma do sup. Seja  $T$  o operador em  $C([a, b])$  dado por  $T(f)(x) := \int_a^x f(t) dt$ . Deduza que  $T$  é um operador contínuo.

Deduza que  $T$  é um *operador compacto*, *i.e* leva toda sequência limitada numa sequência que possui uma subsequência uniformemente convergente, ou, equivalentemente, leva conjuntos limitados (de  $C([a, b])$ ) em subconjuntos precompactos (de  $C([a, b])$ ) (cujo fecho é compacto). Generalize para outros operadores, dando outros exemplos.

- (25) Seja  $\overline{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^n$  e seja  $\mathcal{F}$  uma família do conjunto de todas as funções  $f : \overline{B}_1(0) \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  com as primeiras derivadas parciais *localmente uniformemente limitadas* em  $\overline{B}_1(0)$ . Mostre que  $\mathcal{F}$  é equicontínuo em  $\overline{B}_1(0)$ . *Sugestão:* Mostre que dado  $x_0 \in \overline{B}_1(0)$ , existe uma vizinhança compacta  $K = \overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$ , e  $M_K$  tal que

$$|f_{x_i}(x)| \leq M_K, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Logo  $\forall f \in \mathcal{F}$  (justifique),

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \sqrt{n}M_K\|x - x_0\|$$

- (26) Seja  $\{f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$  uma sequência de funções de classe  $C^2$  (uniformemente) limitada, cujas derivadas  $f'_n$  e  $f''_n$  sejam também (uniformemente) limitadas em  $[0, 1]$ .

Assuma que as  $f_n(t)$  satisfazem à equação diferencial

$$f_n^2 + 2f_n + 3f'_n + t^2 + 1 = 0$$

em  $[0, 1]$ .

Deduza que  $f_n$  possui uma subsequência  $f_{n_j}$  uniformemente convergente a uma função  $f$  de classe  $C^1$  em  $[0, 1]$  que satisfaz a equação:

$$f^2 + 2f + 3f' + t^2 + 1 = 0$$

em  $[0, 1]$ .

- (27) Estude a convergência uniforme das integrais impróprias nos intervalos dados.

(a)

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} e^{-xy} dy, \quad x \geq a > 0$$

(b)

$$\varphi(x) = \int_1^{\infty} \frac{1}{y^{1+x}} dy, \quad x \geq a > 0$$

(c) (*Função Gamma*)

$$\Gamma_1(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \Gamma_2(x) = \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \Gamma(x) := \Gamma_1(x) + \Gamma_2(x), \quad 0 < a \leq x \leq b < \infty$$

(i) OBS: A função Gamma dada por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

é infinitamente diferenciável em  $(0, \infty)$  e

$$\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^\infty e^{-t} (\ln t)^k t^{z-1} dt$$

(ii) Vale a relação funcional

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

daí, vem que  $\Gamma(n+1) = n!$ .

(d) Deduza que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt-\alpha t^2} dt = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{x^2/4\alpha}, \quad \alpha > 0$$

(28) (*Fazer após o curso de Variáveis Complexas*) Discuta amplamente o conceito de *família normal* das Variáveis Complexas, relacionando com o teorema de Arzelà-Ascoli e com o *teorema de Montel para funções meromorfas*. Discuta o *princípio de Bolzano-Weierstrass* neste contexto. Além disso, discuta como o *princípio de compacidade* interfere na demonstração do *teorema de uniformização de Riemann*.

(29) Seja  $f_n(z) = 1/(z+n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Mostre que

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = 0$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

(b) Seja  $A_\alpha = \{z; \Re z \geq \alpha, z \notin -\mathbb{N}\}$ . Mostre que  $f_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) uniformemente em  $A_\alpha$ , onde  $\alpha$  é um número real qualquer. Mais precisamente, mostre que

$$\sup_{z \in A_\alpha} |f_n(z)| \leq \frac{1}{\alpha + n} \quad \text{se } n > -\alpha$$

(c) Mostre que se  $A = \{z; \Im z \geq 1\}$ , então  $f_n \not\rightarrow 0$ , uniformemente em  $A$ , mostrando que  $\sup_{z \in A} |f_n(z)| \geq 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

- (30) Seja  $a_n(z) = 1/(z + n^2)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Seja  $S = \{-n^2; n \in \mathbb{N}\}$ . Considere

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z), \quad z \notin S.$$

- (a) Mostre que  $\sum_{n \geq 0} |a_n(z)| < \infty$ ,  $z \notin S$ .  
 (b) Mostre que a série é uniformemente convergente em  $A_\alpha$ .  
 (c) Mostre que se  $\alpha \leq 0$ , a série  $\sum_{n \geq 0} a_n(z)$  não é normalmente convergente em  $A_\alpha$ , mostrando que  $\|a_n\|_{A_\alpha} = \infty$ , para  $n^2 \leq -\alpha$ .  
 (d) Mostre que a série  $\sum_{n \geq 0} a_n(z)$  não é uniformemente convergente em  $A$  (Ex 1 c)).  
 (e) Mostre que a série  $\sum_{n \geq 0} a_n(z)$  é uniformemente convergente em todo compacto  $K \subset \mathbb{C} \setminus S$ ; conclua que  $f$  é contínua em  $\mathbb{C} \setminus S$ .
- (31) Seja  $\mathcal{F}$  a família de funções  $\{f : B_1(0) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$  de classe  $C^\infty$ , satisfazendo

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \frac{c_0}{1 - |z|} \\ |f^{(k)}(z)| &\leq \frac{c_k(1 + |z|)}{1 - |z|} \\ c_0, c_k &> 0, k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Mostre que toda seqüência  $\{f_n\}$  de funções em  $\mathcal{F}$ , contém uma subseqüência  $\{f_{n_j}\}$  uniformemente convergente em todo compacto  $K \subset B_1(0)$ , à uma função  $f \in \mathcal{F}$ .

Pergunta adicional: Como o enunciado deste problema poderia ser sob um ponto de vista teórico consideravelmente simplificado- sem alterar a força da conclusão- no contexto de *funções holomorfas* definidas na bola unitária  $B_1(0) \subset \mathbb{C}$  ?

- (32) Seja  $\Omega$  um domínio de  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $u_n$  uma seqüência de funções harmônicas (suaves, na verdade analíticas) em  $\Omega$ .  
 (a) Assuma que em todo compacto  $K \subset \Omega$ ,  $u_n$  é uma seqüência de funções uniformemente limitada em  $\Omega$ , isto é

$$m \leq u \leq M$$

em  $\Omega$ , onde  $m, M$  são constantes. Assuma que as derivadas parciais de cada  $u_n$  (de qualquer ordem) dependem em todo ponto  $p \in \Omega$ - em valor absoluto- apenas da limitação da

altura de cada  $u_n$  e da distância  $d = d(p, \partial\Omega)$  de  $p$  ao bordo de  $\Omega$ , isto é

$$|\nabla u(p)| \leq \frac{C}{d} \quad (*)$$

onde  $C = C(M, m)$  é uma constante.

Mostre que existe uma subsequência  $u_{n_j}$  que é uniformemente em todo compacto  $K \subset \Omega$ , convergindo à uma função harmônica  $u$  que em  $\Omega$ .

(b) Deduza que a derivada parcial de uma função harmônica é ainda harmônica. Investigue a veracidade da inequação (\*).

(33) Seja  $\Omega$  um domínio de  $\mathbb{R}^2$ . Considere a *equação da superfície mínima* dada por

$$(*) \quad (1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 0 \quad \text{em } \Omega$$

Seja  $u_n$  uma seqüência de funções de classe  $C^3$  que satisfazem a equação (\*). Assuma que em todo compacto  $K \subset \Omega$ ,  $u_n$  é uma seqüência de funções uniformemente limitada. Assuma que as derivadas parciais de cada  $u_n$  dependem em todo ponto  $p \in \Omega$  em valor absoluto apenas da limitação da altura de cada  $u_n$  e da distância de  $p$  ao bordo de  $\Omega$ . Mostre que existe uma subsequência  $u_{n_j}$  que é uniformemente em todo compacto  $K \subset \Omega$ , convergindo à uma função  $u$  que satisfaz a equação (\*) da superfície mínima em  $\Omega$ .

(34) Estudo: Veja como o teorema de Arzela-Ascoli é aplicado no teorema de existência e unicidade de soluções de uma E.D.O. Mas precisamente, usando o *teorema de Weierstrass*, o *teorema de Picard* e o *teorema de Arzela-Ascoli*, mostre o seguinte:

(*Teorema de Peano*) Seja  $I_a := \{t; |t - t_0| \leq a\} \subset \mathbb{R}$  e seja  $B_b = \{x, \|x - x_0\| \leq b\} \subset \mathbb{R}^n$ . Seja  $f : I_a \times B_b \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua limitada, isto é  $\|f(x)\| \leq M, M > 0, \forall x \in I_a \times B_b$ . Deduza que a E.D.O

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

possui uma solução no intervalo  $|t - t_0| \leq \alpha$ , onde  $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ .

(35) Pesquise como a teoria das *séries de Fourier* pode ser aplicada para dar uma demonstração do teorema de Weierstrass.

(36) Seja  $1 \leq p < \infty$ . Seja  $L^p(0, 1)$  o espaço das funções

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\int_0^1 |f(x)|^p dx < \infty$ . Seja  $q$  tal que

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Pesquise a desigualdade de Hölder: Se  $f$  está  $L^p(0, 1)$  e  $g$  está em  $L^q(0, 1)$ , então  $fg$  está em  $L^1(0, 1)$  e vale

$$\int_0^1 |fg| dx = \left( \int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left( \int_0^1 |g(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

Quando  $p = q = 2$  a desigualdade acima é a conhecida desigualdade de Cauchy-Schwarz.

A norma em  $L^p(0, 1)$  está dada por  $\|u\|_{L^p} := \left( \int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$

Agora, seja  $W^{1,p}(0, 1)$ , ( $p \geq 1$ ) o espaço das funções que estão em  $L^p(0, 1)$  e cujas derivadas ("fracas") também estão em  $L^p(0, 1)$ . Considere  $W^{1,p}(0, 1)$ , ("espaço de Sobolev") como o espaço normado cuja norma está dada por

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

Usando a desigualdade de Hölder, deduza a seguinte desigualdade para  $u$  pertencendo à bola fechada unitária de  $W^{1,p}(0, 1)$  ( $p > 1$ )

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|^{1/q}, \quad \forall x, y \in (0, 1)$$

*Conclua* que se  $1 < p < \infty$ , a injeção  $j : W^{1,p}(0, 1) \hookrightarrow C([0, 1])$  é compacta, ou seja, leva conjuntos limitados em conjuntos pre-compactos (cujo fecho é compacto).

É possível mostrar, fazendo uso da desigualdade de Young e da desigualdade de Hölder, e fazendo uso de um resultado de "densidade" (o conjunto das funções suaves de suporte compacto definidas em toda a reta real é densa em  $W^{1,p}$ ), que vale a seguinte desigualdade ( $p \geq 1$ ):

$$\|v\|_{\infty} \leq C \|v\|_{W^{1,p}}, \quad \text{para } v \in W^{1,p}(0, 1)$$

onde  $C$  é uma constante universal. Daí a inclusão  $i : W^{1,p}(0, 1) \hookrightarrow L^{\infty}(0, 1)$  é contínua ( $p \geq 1$ ).