LISTA 11 DE ANÁLISE REAL 2010

RICARDO SA EARP

Integrabilidade

(1) Seja f uma função contínua no intervalo $[0, \infty)$. Para $x > 0$, colocamos

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad F(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$$

   (a) Mostre que $\lim_{x \to 0^+} F(x) = f(0) := F(0)$.
   (b) Assuma agora que $f(x)$ é diferenciável em $[0, \infty)$. Mostre que $F(x)$ é diferenciável e que $F'(0) = \dfrac{f'(0)}{2}$.

(2) Calcule $\lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} \dfrac{\sqrt{n^2 - p^2}}{n^2}$. Resposta: $\pi/4$.

(3) (*lema de Riemann-Lebesgue*) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função Riemann integrável. Deduza que

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^b f(x) \sin(tx)\ \mathrm{d}x = 0$$

   Sugestão: Considere uma partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ dada por $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ e faça estimativas em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, usando o critério de integrabilidade. OBS: O lema de Riemann Lebesqgue é válido em L^1, usando um argumento de aproximação, aproximando uma função em L^1 por uma função contínua.

(4) Exiba um exemplo de uma curva parametrizada C^0 que não é retificável.

(5) Considere a função $f(x) = -\dfrac{1}{\ln|x|}$, $0 < |x| < 1/2$, $f(0) = 0$. Deduza que $f(x)$ é de variação limitada.

(6) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que sua derivada seja limitada. Deduza que f é absolutamente contínua, logo de

variação limitada. Exiba um exemplo de uma função contínua num intervalo fechado que não é de variação limitada.

(7) Vamos agora examinar de um outro ponto de vista as identidades

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \qquad \ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

que já sabíamos deduzir via as séries de Tayor de $\arctan z$ e $\ln(1+z)$, na origem. Considere a integral

$$I(n) = \int_0^{\pi/4} \tan^n \theta \, \mathrm{d}\theta \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(a) Fazendo integração por partes mostre que

$$\begin{aligned}
I(2n) &= \int_0^{\pi/4} \tan^{2n-2}\theta \, (\sec^2\theta - 1) \, \mathrm{d}\theta \\
&= -I(2n-2) + \int_0^{\pi/4} \tan^{2n-2}\theta \sec^2\theta \, \mathrm{d}\theta \\
&= -I(2n-2) + \frac{1}{2n-1} \\
&= \frac{1}{2n-1} - \left(-I(2n-4) + \frac{1}{2n-3}\right) \\
&\ldots \\
&= \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-5} - + \cdots + (-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Deduzindo que

$$\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \right| = I(2n) \tag{1}$$

Analogamente, mostre que

$$\left| \frac{1}{2} \ln 2 - \sum_{1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} \right| = I(2n+1) \tag{2}$$

(b) Mostre que $I(n)$ decresce estritamente quando n cresce, concluindo que

$$I(n) < \frac{1}{2(n-1)} \qquad I(n-2) > \frac{1}{2(n-1)}$$

portanto

$$\frac{1}{2(n+1)} < I(n) < \frac{1}{2(n-1)}$$

(c) Aplique o resultado acima nas equações (1) e (2) para obter as estimativas

$$\frac{1}{2(2n+1)} < \left| \frac{\pi}{4} - \sum_{1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \right| < \frac{1}{2(2n-1)}$$

$$\frac{1}{2(n+1)} < \left| \ln 2 - \sum_{1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| < \frac{1}{2n}$$

(8) Deduza que toda integral imprópria absolutamente convergente é convergente. Deduza que a integral imprópria $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\sin t}{t^2}\, \mathrm{d}t$ é absolutamente convergente.

(9) Seja $f : [a, b) \longrightarrow [0, \infty)$, uma função localmente integrável. Estabeleça um critério para que a integral imprópria $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\, \mathrm{d}x$, seja convergente.

(10) Sejam$f, g : [a, b) \longrightarrow [0, \infty)$, duas funções localmente integráveis. Seja $c \in [a, b)$. Assuma que $f(x) \leqslant g(x)$, $\forall x \in [c, b)$.

(a) Assuma que $\displaystyle\int_{a}^{b} g(x)\, \mathrm{d}x$ seja convergente. Deduza que o mesmo vale para $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\, \mathrm{d}x$.

(b) Assuma que $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ seja divergente. Deduza que o mesmo ocorre para $\displaystyle\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$.

Assumindo agora $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, b) \longrightarrow [0, \infty)$, conclua o seguinte

(a) Se $f = O(g)$, quando $x \to b_-$ e se $\displaystyle\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$ é convergente, então a integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ é absolutamente convergente.

(b) Se existe $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$, tal que $f \sim \alpha g$, quando $x \to b_-$ (i.e $f - \alpha g = o(g)$), então $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ é convergente se, e só se $\displaystyle\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$ é convergente.

(11) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e seja $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função localmente integrável. Aplicando o exercício precedente, deduza que

(a) Se $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x)$ existe e é não nulo, então $\int_a^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ converge se e somente se $\alpha > 1$.

(b) Se $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = 0$ e se $\alpha > 1$ então $\int_a^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ é absolutamente convergente.

(c) Exemplifique as situações dos itens anteriores, por exemplo considerando $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t$.

(d) Seja $I = \displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\ \mathrm{d}t$.

(i) Deduza que se $\alpha > 1$ então a integral é convergente.
(ii) Deduza que de $\alpha < 1$ então I é divergente.
(iii) Deduza que se $\alpha = 1$ e $\beta > 1$, então I é convergente.

(12) Deduza que para que a integral imprópria $\int\limits_a^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ converja é suficiente que exista uma sequência $\{x_n\}$ com $x_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ tal que a série $\sum \int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ seja convergente et tal a sequência que $\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ tenda a zero.

(13) (*Teste da integral*) Assuma que $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ seja decrescente e positiva $(f \geqslant 0)$. Deduza que para que a integral imprópria $\int\limits_a^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, see somente se a série $\sum\limits_{n \geqslant a} f(n)$ converge.

(a) Exiba exemplos que ilustrem a situação da afirmação anterior, por exemplo considerando $I = \int\limits_2^\infty \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$, para $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ e $\beta > 1$.

(14) Dê um exemplo de uma função diferenciável $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, que não seja de classe C^1 em $[0, 1]$, mas que a derivada seja integrável no sentido que $\int\limits_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$, podendo a integral ser imprópria.

(15) (*Derivação sob o símbolo da integração I*) Seja I um intervalo aberto da reta. Seja $f : [a, b] \times I \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$ uma função contínua tal que a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ exista e seja contínua em $[a, b] \times \mathbb{R}$. Deduza que a função $F(x) := \int\limits_a^b f(t, x)\,\mathrm{d}x$ é de classe C^1 e vale que

$$F'(x) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\,\mathrm{d}t, \ \forall x \in I$$

(16) (*Derivação sob o símbolo da integração II*) Seja I um intervalo aberto da reta. Seja $f : [a, b] \times I \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ exista e seja contínua em $[a, b] \times \mathbb{R}$. Deduza que a função $H : [a, b] \times [a, b] \times I \to \mathbb{R}$

dada por $H(u,v,x) := \int\limits_u^v f(t,x)\,\mathrm{d}x$ é de classe C^1. Calcule $\dfrac{\partial H}{\partial x}(u_0,v_0,x_0)$, $\dfrac{\partial H}{\partial u}(u_0,v_0,x_0)$ e $\dfrac{\partial H}{\partial v}(u_0,v_0,x_0)$

(17) (*Derivação sob o símbolo da integração III*) Nas hipóteses do item anterior, se $u : I \to [a,b]$ e $v : I \to [a,b]$ são funções diferenciáveis, deduza que $H(x) := \int\limits_{u(x)}^{v(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}x$ é diferenciável em I e vale que

$$H'(x) = v'(x)f(v(x),x) - u'(x)f(u(x),x) + \int\limits_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,\mathrm{d}t$$

Conclua que

(18) (*Fubini-versão bem particular*) Se $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ uma função contínua então

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(t,x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

(19) Considere a função real dada

$$f(x) = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

(a) Mostre que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e que

$$f'(x) = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

Além disso mostre que $f(x) \to 0$, quando $x \to \infty$ e que $f(x) \to \infty$ quando $x \to -\infty$.

(b) Considere $g(x) = f(x^2)$. Mostre que $g'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Deduza que

(c) $g(x) + \left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{(-t^2)}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}$, e portanto $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(20) Mostre que

$$\int_a^b \frac{1}{(t^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n}\frac{t}{(t^2+1)^n}\bigg]_a^b + \frac{2n-1}{2n}\int_a^b \frac{1}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t$$

(21) Calcule

(a)

$$\int_0^1 \frac{1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\pi}{2}$$

(b)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 t\,\mathrm{d}t = \frac{3\pi}{16}$$

(c)

$$\int_a^x \frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) - \ln\left(\tan\frac{a}{2}\right)$$

(d)

$$\int_a^x \frac{1}{\sin^4 t}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{3\tan^3 a} - \frac{1}{3\tan^3 x}\right) + \left(\frac{1}{\tan a} - \frac{1}{\tan x}\right)$$

(e) (*Fórmula de Wallis*) Seja $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,\mathrm{d}t$. Obtenha uma relação de recorrência entre I_n e I_{n-1}, calculando I_{2n} e I_{2n+1}.

(22) Calcule

$$\int_a^b \frac{1}{t}\sqrt{\frac{1+t}{t}}\,\mathrm{d}t \qquad (0 < a < b)$$

(23) Estude a convergência das integrais impróprias

(a)

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y,\ x \geqslant a > 0$$

(b)
$$\varphi(x) = \int\limits_1^\infty \frac{1}{y^{1+x}}\,\mathrm{d}y,\ x \geqslant a > 0$$
(c)
$$\int\limits_0^\infty \sin t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}, \qquad \int\limits_0^\infty \cos t^2\,\mathrm{d}t$$
(d)
$$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi\,\mathrm{e}^{-\alpha}, \qquad \alpha > 0$$
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,!!$$
(e)
$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \qquad 0 < a < 1$$

(24) Mostre que
$$\lim_{R\to\infty}\int_0^\pi \mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0$$
Nota: Na verdade, $\lim\limits_{R\to\infty} R\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2.$

(25) Estude a convergência das integrais impróprias
$$\Gamma_1(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t, \quad \Gamma_2(x) = \int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t,\ 0 < a \leqslant x \leqslant b$$
$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,t^{z-1}\,\mathrm{d}t$$