LISTA 12 DE ANÁLISE REAL 2010

RICARDO SA EARP

Convergência uniforme

(1) Seja $\alpha > 0$. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e considere $u : [0,1] \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left(f(s) \sin n\pi s \, \sin n\pi x \, \mathrm{e}^{-\alpha^2 \pi^2 n^2 t} \right) \mathrm{d}s$$

(a) Deduza que existe uma função $K(x,s,t)$ definida em $[0,1] \times [0,1] \times (0,\infty)$ de classe C^∞ tal que
$$u(x,t) = \int_0^1 K(x,s,t) f(s) \, \mathrm{d}s$$
(b) Deduza que $u(x,t)$ é de classe C^∞.

(2) Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções eqüicontínuas em um conjunto compacto K que converge pontualmente em K. Mostre que f_n converge uniformemente em K.

(3) Assuma que uma sequência de funções diferenciáveis $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ converge pontualmente a uma função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Assuma que a sequência das derivadas $\{f_n'\}$ é uniformemente limitada; *i.e* $\exists M > 0; |f_n'(x)| \leqslant M$, $\forall x \in (0,1)$. Deduza que f é contínua.

(4) (*Critério de convergência uniforme*) Seja X um conjunto e seja $\{f_n\}$ um seqüência de funções definidas em X. Mostre que $f_n \xrightarrow{u} f$, uniformemente em X, se e somente se $\lim_{n\to\infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = 0$, para toda seqüência $\{x_n\}$ em X.

Utilize este resultado para mostrar que $f_n(x) = nx(1-x)^n, 0 \leqslant x \leqslant 1$ é uma seqüência de funções contínuas que converge pontualmente à 0, mas a convergência não é uniforme. Seria tal seqüência limitada no espaço métrico $C([0,1])$?

(5) Seja $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções diferenciáveis definidas em um domínio Ω de $\mathbb{R}^k$. Assuma que

(a) Existe um ponto $x_0 \in \Omega$ tal que a sequência $\{f_n(x_0)\}$ converge.

(b) As sequências das derivadas parciais $\{\dfrac{\partial f_n}{\partial x_j}, j = 1, \ldots, k\}$ converge uniformemente *localmente* em Ω, escrevemos, $g_j(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_j}, x \in \Omega\}$

Deduza que o limite

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) := f(x)$$

existe $\forall x \in \Omega$, sendo o limite localmente uniforme. Além disso, deduza que f é diferenciável em Ω e vale que $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j} = g_j(x), \forall x \in \Omega\}$. Conclua que se f_n é de classe C^1 então f também é de classe C^1.

(6) Deduza um resultado análogo ao do item anterior para séries.

(7) Seja K um espaço compacto e sejam $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ sequências de funções reais contínuas tais que $f_n \to f$ e $g_n \to g$, uniformemente em K. Deduza que $f_n g_n \to fg$ uniformemente em K. Mostre com um contraexemplo que a hipótese da compacidade não pode ser relevada.

(8) Mostre que a seqüência de funções reais $f_n(x) = \sin(x + n^3 + \mathrm{e}^{n^2})$ contém uma subseqüência que converge uniformemente em qualquer subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$.*Sugestão*: Use as fórmulas trigonométricas: $\cos z - \cos w = -2\sin(\dfrac{z+w}{2})\sin(\dfrac{z-w}{2})$ e $\sin z + \sin w = 2\sin(\dfrac{z+w}{2})\cos(\dfrac{z-w}{2})$.

(9) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua satisfazendo $\int\limits_a^b f(x)\, x^n \,\mathrm{d}x = 0, n = 1, 2, \ldots$. Deduza que f é identicamente nula.

(10) (*Teorema de Dini*) Seja X um compacto. Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções contínuas em X que converge pontualmente para uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$. Assuma que $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x), n = 1, 2, \ldots,$ e cada $x \in X$. Mostre que $f_n \xrightarrow[X]{u} f$, i.e f_n converge uniformemente à f em X. Mostre com um exemplo que a hipótese de compacidade é necessária.

(11) (*O espaço de Banach $C(K)$*) Mostre que toda seqüência de funções limitadas que é uniformemente convergente, também é uniformemente limitada.

(12) Seja K um conjunto compacto. Defina uma métrica no conjunto $C(K)$ das funções reais contínuas definidas em K, de modo que uma seqüência f_n converge à f em $C(K)$ se e somente se f_n converge uniformemente à f em K. Discuta a completude deste

espaço métrico. Discuta a noção de subconjunto fechado em $C(K)$. Discuta a noção de subconjunto compacto deste espaço, relacionando com o teorema de Arzelà- Ascoli.

(13) Seja $C([a,b])$ o espaço da funções contínuas definidas no intervalo $[a,b]$ com a norma do sup. Seja T o operador em $C([a,b])$ dado por $T(f)(x) := \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Deduza que T é um *operador contínuo.*

Deduza que T é um *operador compacto*, *i.e* leva toda seqûencia limitada numa sequência que possui uma subsequência uniformemente convergente, ou, equivalentemente, leva conjuntos limitados (de $C([a,b])$) em subconjuntos precompactos (de $C([a,b])$) (cujo fecho é compacto). Generalize para outros operadores, dando outros exemplos.

(14) Seja $\overline{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ e seja $\mathcal{F}$ uma família do conjunto de todas as funções$f : \overline{B}_1(0) \to \mathbb{R}$ de classe C^1 com as primeiras derivadas parciais *localmente uniformemente limitadas* em $\overline{B}_1(0)$. Mostre que $\mathcal{F}$ é equicontínuo em $\overline{B}_1(0)$. *Sugestão*: Mostre que dado $x_0 \in \overline{B}_1(0)$, existe uma vizinhança compacta $K = \overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$, e M_K tal que

$$|f_{x_i}(x)| \leqslant M_K, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Logo $\forall f \in \mathcal{F}$ (justifique),

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \sqrt{n} M_K \|x - x_0\|$$

(15) Seja $\{f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}\}$ uma sequência de funções de classe C^2 (uniformemente) limitada, cujas derivadas f_n' e f_n'' sejam também (uniformemente) limitadas em $[0,1]$.

Assuma que as $f_n(t)$ satisfazem à equação diferencial

$$f_n^2 + 2f_n + 3f_n' + t^2 + 1 = 0$$

em $[0,1]$.

Deduza que f_n possui uma subsequência f_{n_j} uniformemente convergente a uma função f de classe C^1 em $[0,1]$ que satisfaz a equação:

$$f^2 + 2f + 3f' + t^2 + 1 = 0$$

em $[0,1]$.

(16) Estude a convergência uniforme das integrais impróprias nos intervalos dados.

(a)
$$\varphi(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y,\ x \geqslant a > 0$$

(b)
$$\varphi(x) = \int_1^\infty \frac{1}{y^{1+x}}\,\mathrm{d}y,\ x \geqslant a > 0$$

(c) (*Função Gamma*)

$$\Gamma_1(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t, \quad \Gamma_2(x) = \int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t,\ \Gamma(x) := \Gamma_1(x)+\Gamma_2(x),\ 0 < a \leqslant x \leqslant b < \infty$$

(i) OBS: A função Gamma dada por
$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{z-1}\,\mathrm{d}t$$
é infinitamente diferenciável em $(0,\infty)$ e
$$\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,(\ln t)^k\, t^{z-1}\,\mathrm{d}t$$

(ii) Vale a relação funcional
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$
daí, vem que $\Gamma(n+1) = n!$.

(d) Deduza que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{xt-\alpha t^2}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{x^2/4\alpha}, \quad \alpha > 0$$

(17) (*Fazer após o curso de Variáveis Complexas*) Discuta amplamente o conceito de *família normal* das Variáveis Complexas, relacionando com o teorema de Arzelà- Ascoli e com o *teorema de Montel para funções meromorfas.* Discuta o *princípio de Bolzano- Weierstrass* neste contexto. Além disso, discuta como o *princípio de compacidade* interfere na demonstração do *teorema de uniformização de Riemann.*

(18) Seja $f_n(z) = 1/(z+n),\ n \in \mathbb{N}$. Mostre que

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = 0,\ z \in \mathbb{C}$.

(b) Seja $A_\alpha = \{z; \Re z \geqslant \alpha, z \notin -\mathbb{N}\}$. Mostre que $f_n \longrightarrow 0\,(n \to \infty)$ uniformemente em A_a, onde α é um número real qualquer. Mais precisamente, mostre que

$$\sup_{z\in A_\alpha} |f_n(z)| \leqslant \frac{1}{\alpha+n} \qquad \text{se } n > -\alpha$$

(c) Mostre que se $A = \{z; \Im z \geqslant 1\}$, então $f_n \not\to 0$, uniformemente em A, mostrando que $\sup_{z\in A} |f_n(z)| \geqslant 1,\ n \in \mathbb{N}$.

(19) Seja $a_n(z) = 1/(z+n^2),\ n \in \mathbb{N}$. Seja $S = \{-n^2;\ n \in \mathbb{N}\}$. Considere

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z), \qquad z \notin S.$$

(a) Mostre que $\sum_{n\geqslant 0} |a_n(z)| < \infty, \quad z \notin S.$

(b) Mostre que a série é uniformemente convergente em A_α.

(c) Mostre que se $\alpha \leqslant 0$, a série $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z)$ não é normalmente convergente em A_α, mostrando que $\|a_n\|_{A_\alpha} = \infty$, para $n^2 \leqslant -\alpha$.

(d) Mostre que a série $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z)$ não é uniformemente convergente em A (Ex 1 c)).

(e) Mostre que a série $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z)$ é uniformemente convergente em todo compacto $K \subset \mathbb{C} \setminus S$; conclua que f é contínua em $\mathbb{C} \setminus S$.

(20) Seja $\mathcal{F}$ a família de funções $\{f : B_1(0) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ de classe C^∞, satisfazendo

$$|f(z)| \leqslant \frac{c_0}{1-|z|}$$
$$|f^{(k)}(z)| \leqslant \frac{c_k(1+|z|)}{1-|z|}$$
$$c_0, c_k > 0, k = 1, 2 \ldots$$

Mostre que toda seqüência $\{f_n\}$ de funções em $\mathcal{F}$, contém uma subseqüência $\{f_{n_j}\}$ uniformemente convergente em todo compacto $K \subset B_1(0)$, à uma função $f \in \mathcal{F}$.

Pergunta adicional: Como o enunciado deste problema poderia ser sob um ponto de vista teórico consideravelmente simplificado- sem alterar a força da conclusão- no contexto de *funções holomorfas* definidas na bola unitária $B_1(0) \subset \mathbb{C}$?

(21) Seja Ω um domínio de $\mathbb{R}^2$. Seja u_n uma seqüência de funções harmônicas (suaves, na verdade analíticas) em Ω.

(a) Assuma que em todo compacto $K \subset \Omega$, u_n é uma seqüência de funções uniformemente limitada em Ω, isto é

$$m \leqslant u \leqslant M$$

em Ω, onde m, M são constantes. Assuma que as derivadas parciais de cada u_n (de qualquer ordem) dependem em todo ponto $p \in \Omega$- *em valor absoluto*- apenas da limitação da altura de cada u_n e da distância $d = d(p, \partial\Omega)$ de p ao bordo de Ω, isto é

$$|\nabla u(p)| \leqslant \frac{C}{d} \qquad (*)$$

onde $C = C(M, m)$ é uma constante.
Mostre que existe uma subseqüência u_{n_j} que é uniformemente em todo compacto $K \subset \Omega$, convergindo à uma função harmônica u que em Ω.

(b) Deduza que a derivada parcial de uma função harmônica é ainda harmônica. Investigue a veracidade da inequação $(*)$.

(22) Seja Ω um domínio de $\mathbb{R}^2$. Considere a *equação da superfície mínima* dada por

$$(*) \qquad (1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega$$

Seja u_n uma seqüência de funções de classe C^3 que satisfazem a equação $(*)$. Assuma que em todo compacto $K \subset \Omega$, u_n é uma seqüência de funções uniformemente limitada. Assuma que as derivadas parciais de cada u_n dependem em todo ponto $p \in \Omega$- em valor absoluto- apenas da limitação da altura de cada u_n e da distância de p ao bordo de Ω. Mostre que existe uma subseqüência u_{n_j} que é uniformemente em todo compacto $K \subset \Omega$, convergindo à uma função u que satisfaz a equação $(*)$ da superfície mínima em Ω.

(23) Estudo: Veja como o teorema de Arzela-Ascoli é aplicado no teorema de existência e unicidade de soluções de uma E.D.O. Mas precisamente, usando o *teorema de Weierstrass*, o *teorema de Picard* e o *teorema de Arzela-Ascoli*, mostre o seguinte:

(*Teorema de Peano*) Seja $I_a := \{t; |t - t_o| \leqslant a\} \subset \mathbb{R}$ e seja $B_b = \{x, \|x - x_0\| \leqslant b\} \subset \mathbb{R}^n$. Seja $f : I_a \times B_b \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua limitada, isto é $\|f(x)\| \leqslant M, M > 0, \forall x \in I_a \times B_b$.

Deduza que a E.D.O

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$

possui uma solução no intervalo $|t - t_0| \leqslant \alpha$, onde $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

(24) Pesquise como a teoria das *séries de Fourier* pode ser aplicada para dar uma demonstração do teorema de Weierstrass.

(25) Seja $1 \leqslant p < \infty$. Seja $L^p(0,1)$ o espaço das funções $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $\int_0^1 |f(x)|^p dx < \infty$. Seja q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pesquise a desigualdade de Hölder: Se f está $L^p(0,1)$ e g está em $L^q(0,1)$, então fg está em $L^1(0,1)$ e vale

$$\int_0^1 |fg| dx = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_0^1 |g(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

Quando $p = q = 2$ a desigualdade acima é a conhecida desigualdade de Cauchy-Schwarz.

A norma em $L^p(0,1)$ está dada por $\|u\|_{L^p} := \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$

Agora, seja $W^{1,p}(0,1)$, ($p \geqslant 1$) o espaço das funções que estão em $L^p(0,1)$ e cujas derivadas (" fracas") também estão em $L^p(0,1)$. Considere $W^{1,p}(0,1)$, (" espaço de Sobolev") como o espaço normado cuja norma está dada por

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

Usando a desigualdade de Hölder, deduza a seguinte desigualdade para u pertencendo à bola fechada unitária de $W^{1,p}(0,1)$ ($p > 1$)

$$|u(x) - u(y)| \leqslant |x - y|^{1/q}, \quad \forall x, y \in (0,1)$$

Conclua que se $1 < p < \infty$, a injeção $j : W^{1,p}(0,1) \hookrightarrow C([0,1])$ é compacta, ou seja, leva conjuntos limitados em conjuntos pre-compactos (cujo fecho é compacto).

É possível mostrar, fazendo uso da desigualdade de Young e da desigualdade de Hölder, e fazendo uso de um resultado de " densidade" (o conjunto das funções suaves de suporte compacto definidas em toda a reta real é densa em $W^{1,p}$), que vale a seguinte desigualdade ($p \geqslant 1$):

$$\|v\|_\infty \leqslant C\|v\|_{W^{1,p}}, \qquad \text{para } v \in W^{1,p}(0,1)$$

onde C é uma constante universal. Daí a inclusão $i : W^{1,p}(0,1) \hookrightarrow L^\infty(0,1)$ é contínua ($p \geqslant 1$).