

LISTA 1 DE ANÁLISE REAL 2009

RICARDO SA EARP

Elementos de espaços métricos e desigualdades clássicas

Espaços métricos

Nsta lista (X, d) ou simplesmente X será um espaço métrico com distância d .

Nos próximos exercícios vamos revisar certos conceitos básicos topológicos de espaços métricos.

- (1) Mostre que para todo subconjunto A de X , o conjunto $\overset{\circ}{A}$ é aberto e A é aberto se e somente se $A = \overset{\circ}{A}$. Além mostre que \overline{A} é fechado e A é fechado, se e só se $A = \overline{A}$. Dê uma caracterização dos conjuntos fechados em termos de seqüências .
- (2) Sejam A e B dois subconjuntos de \mathbb{R} . Mostre que para o subconjunto $A \times B$ de \mathbb{R}^2 (produto cartesiano), valem as seguintes propriedades:

$$(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ, \quad \overline{(A \times B)} = \overline{A} \times \overline{B}$$
$$\partial(A \times B) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B)$$

- (3) Mostre que se X é um espaço de Banach (ou seja; X é uma espaço vetorial normado completo) e se A é um subespaço vetorial fechado de X , então A é espaço de Banach. Mostre que se X é um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$, e se $\{x_n\}$ é uma seqüência de pontos de X , tal que a série $\sum_1^\infty x_n$ é *normalmente*

convergente; isto é, $\sum_1^\infty \|x_n\| < \infty$, então a série $\sum_1^\infty x_n$ converge.

Dê exemplos e contraexemplos da recíproca.

Dizemos que uma subespaço A do espaço métrico X é *denso* em X se o fecho de A é X , ou seja $\overline{A} = X$. Dizemos que X é um espaço métrico separável, se X contém um subconjunto enumerável e denso.

- (4) Verifique que todo espaço Euclidiano (espaço vetorial normado de dimensão finita) é separável, mostrando que \mathbb{R}^n é separável.
- (5) Mostre que se α é um número irracional então o subconjunto de números reais $\{\alpha m + n, n, m \in \mathbb{Z}\}$ é denso em \mathbb{R} . Desta informação o que você pode concluir sobre a aderência do conjunto $\{\cos n, n \in \mathbb{Z}\}$?

Desigualdades

Uma desigualdade clássica é a bem conhecida desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica: Sejam a_1, \dots, a_n números reais positivos. Segue então que

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

Compare o resultado anterior com a propriedade de *convexidade* da função exponencial: Para números reais x_1, \dots, x_n , vale que

$$e^{\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)} \leq \frac{1}{n}(e^{x_1} + \cdots + e^{x_n})$$

Outra desigualdade fundamental é a seguintes: Sejam a_1, \dots, a_n e b_1, \dots, b_n números reais não negativos. Dados números positivos p, q tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q} \quad (\text{Desigualdade de Hölder})$$

- (6) Deduza, usando qualquer ferramenta do cálculo, que

se $x \geq -1$, e $0 < \alpha < 1$, então

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$$

se $\alpha < 0$ ou $\alpha > 1$, então

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$$

Sendo que a igualdade nestas desigualdades ocorre se e somente se $x = 0$.

Uma outra forma útil das desigualdades acima é a seguinte:

$$y^\alpha \leq 1 - \alpha + \alpha y$$

se $y \geq 0$ e $0 < \alpha < 1$ (*)

$$y^\alpha \geq 1 - \alpha + \alpha y$$

se $y \geq 0$ e $\alpha > 1$ ou $\alpha < 0$

Sendo que a igualdade nestas desigualdades ocorre se e somente se $y = 1$.

- (7) Para x e y números reais positivos, mostre que

$$(xy^n)^{1/(n+1)} < \frac{x + ny}{1 + n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

a menos que $x = y$.

- (8) Mostre que

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad n = 2, \dots$$

- (9) Mostre que se x_1, \dots, x_n são números reais positivos que

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right) \geq n^2$$

sendo que a igualdade é válida se e somente se $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

- (10) Use cálculo diferencial básico de uma variável real para mostrar que para x suficientemente grande, *i. e.*, para $x \geq C$, então

$$x^{1/100} > \ln x$$

Dê uma "boa estimativa" para tal constante C .

- (11) Mostre usando o conhecimento da função exponencial (você fica proibido de usar neste exercício a regra de l'Hôpital) que para p, q positivos vale

$$e^{x^p} > x^q$$

para x suficientemente grande

- (12) Para o próximo exercício você vai estar baseado no conhecimento do conceito de *convexidade*. Mostre que para $x > y > 0$ positivos e $p > 1$ vale

$$(x + y)^p < 2^{p-1}(x^p + y^p)$$

Você poderia generalizar a desigualdade acima para n números?

- (13) Use a desigualdade (*) para mostrar que se $0 < \alpha < 1$ e se a, b são não negativos então

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha)b$$

Quando x e y são positivos, satisfazendo $x + y = 1$, fazendo $\alpha = x$ e $1 - \alpha = y$, obtenha

$$a^x b^y \leq xa + yb \quad (**)$$

- (14) sendo que a igualdade é válida, se e só se $a = b$. Mostre que a desigualdade (**) pode ser escrita da seguinte forma

$$a^\alpha - b^\alpha < ab^{\alpha-1}(a - b), \quad 0 < \alpha < 1$$

formulação esta que é deveras útil.

A desigualdade (**) é suficientemente importante para apresentarmos uma demonstração para um número n de números reais positivos a_1, \dots, a_n e números positivos x_1, x_2, \dots, x_n , satisfazendo $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Afirmamos que neste caso vale também

$$a_1^{x_1} a_2^{x_2} \cdots a_n^{x_n} \leq \sum_{i=1}^n x_i a_i$$

Repetimos que imbutida na desigualdade acima está a idéia de *convexidade* (que você verá proximamente, em detalhes). Vamos prosseguir com uma demonstração por indução. Suponhamos que a propriedade esteja demonstrada para m (ou menor) números. Seja x_1, \dots, x_{m+1} números positivos satisfazendo $x_1 + x_2 + \dots + x_{m+1} = 1$. Coloquemos $x_1 + x_2 + \dots + x_m = \sigma$. Segue que

$$\begin{aligned} a_1^{x_1} a_2^{x_2} \cdots a_m^{x_m} a_{m+1}^{x_{m+1}} &= \left(a_1^{x_1/\sigma} a_2^{x_2/\sigma} \cdots a_m^{x_m/\sigma} \right)^\sigma a_{m+1}^{x_{m+1}} \\ &\leq \left(a_1^{x_1/\sigma} a_2^{x_2/\sigma} \cdots a_m^{x_m/\sigma} \right) \sigma + a_{m+1} x_{m+1} \end{aligned}$$

usando a propriedade para o caso de dois números. O argumento fica finalizado aplicando a hipótese de indução. Sendo que a igualdade é verificada se e somente se todos os números a_i são iguais.

- (15) Mostre a desigualdade de Young, usando o item anterior: Se a, b são positivos, e se p, q com $p > 1$ satisfazem $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (\text{desigualdade de Young})$$

sendo que vale a igualdade se e só se $a^p = b^q$.

- (16) Mostre que se $a \geq b > 0$, e $a + b = 1$, então

$$a^a b^b \geq \frac{(a+b)^{a+b}}{2}$$

- (17) Mostre o seguinte resultado de Bohr. Se $c > 0$ então

$$|a+b|^2 \leq (1+c)|a|^2 + \left(1 + \frac{1}{c}\right)|b|^2$$

Vamos agora demonstrar a clássica desigualdade de Hölder. sejam p, q números reais positivos, satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se a_1, \dots, a_n e b_1, \dots, b_n são não negativos, então

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}$$

(18) sendo que a igualdade é válida se e somente se $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$, ou $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \dots = a_n/b_n$. O caso especial em que $p = q = 2$ é famoso e chamado de desigualdade de Cauchy. A demonstração usa a desigualdade (**) fazendo

$$A_i := \frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p} \text{ e } B_i := \frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q}$$

(19) Complete a demonstração da desigualdade de Hölder, como exercício.

Observações adicionais informativas:

Considere o espaço $l^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$, consistindo no conjunto das seqüências de números reais $x = \{x_n\}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$$

Considere também $l^\infty(\mathbb{R})$, o conjunto de seqüências de números reais $x = \{x_n\}$, *limitadas*.

É um fato que $l^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$, é um espaço de Banach, com a norma

$$\|x\|_{l^p} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

A desigualdade triangular aqui é a desigualdade de Minkowski.

Além disso, $l^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$, é um espaço de Banach. Observe que $l^\infty(\mathbb{R})$, com a norma

$$\|x\|_{l^\infty} := \sup_n |x_n|$$

é um espaço de Banach que contém os espaços l^p 's ($p \geq 1$).

Vale a *desigualdade de Jensen*: Se $1 \leq q < p$, então

$$(1) \quad \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^q \right)^{1/q}$$

Ou seja a função

$$p \rightarrow \|x\|_{l^p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

é decrescente. Na verdade, o limite $\|x\|_{l^p}$ quando $(p \rightarrow \infty)$ existe e é igual a $\|x\|_{l^\infty}$. Há uma relação de inclusão entre os espaços

(20) l^p , $p \geq 1$. Observamos que a desigualdade de Jensen é válida para $0 < q < p$.

(21) Além disso, mostre que a inclusão entre os vários espaços l^p , $p \geq 1$, é *estrita*; primeiramente, que $l^1 \subsetneq l^2$. Observamos que se $p > q \geq 1$, existe $r > 0$, tal que $\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$. A desigualdade de Hölder pode ser aplicada para mostrar a seguinte desigualdade entre a *média das potências* (que é válida para todo p, q satisfazendo $q < p$):

$$(2) \quad \left(\frac{\sum_{i=1}^N |a_i|^q}{N} \right)^{1/q} \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^N |a_i|^p}{N} \right)^{1/p}$$

Também é possível demonstrar A *desigualdade de Hardy*, diz que para $p > 1$, vale

$$(3) \quad \sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^N |a_i|}{N} \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p$$

Vale que que $l^2(\mathbb{R})$ é um espaço de Hilbert, ou seja, $l^2(\mathbb{R})$ é um espaço de Banach cuja norma provém de um produto interno.