LISTA 1 DE ANÁLISE REAL 2011

RICARDO SA EARP

Desigualdades clássicas

(1) Se x, y, z são números reais positivos satisfazendo $x^3 + y^3 = z^3$, deduza que

$$\left(\frac{xy}{z^2}\right)^3 \leqslant \frac{1}{4}$$

(2) (a) Deduza que se x, y, z são números reais positivos, então

$$\left(\frac{x^4 + y^4 + z^4}{3}\right)^{1/4} \geqslant \frac{x + y + z}{3} \qquad (1)$$

(b) Conclua do item anterior que se x, y, z são números reais positivos satisfazendo $x^4 + y^4 + z^4 = 27$, então $x + y + z \leqslant 3\sqrt{3}$.

(c) Generalize a desigualdade (1).

(3) Para x e y números reais positivos, mostre que

$$(xy^n)^{1/(n+1)} < \frac{x + ny}{1 + n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

a menos que $x = y$.

(4) Mostre que

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \qquad n = 2, \ldots$$

(5) Mostre que se $x_1, \ldots, x_n$ são números reais positivos que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geqslant n^2$$

sendo que a igualdade é válida se e somente se $x_1 = x_2 = \cdots x_n$.

(6) Deduza a desigualdade de Bohr: Se $c > 0$ então

$$|a + b|^2 \leqslant (1 + c)|a|^2 + \left(1 + \frac{1}{c}\right)|b|^2$$

(7) Para o próximo exercício você vai está baseado no conhecimento do conceito de *convexidade*. Mostre que para $x > y > 0$ positivos e $p > 1$ vale

$$(x + y)^p < 2^{p-1}(x^p + y^p)$$

(8) Use cálculo diferencial básico de uma variável real para mostrar que para x suficientemente grande, *i. e*, para $x \geqslant C$, então

$$x^{1/100} > \ln x$$

(9) Mostre usando o conhecimento da função exponencial (você fica proibido de usar neste exercício a regra de l'Hôpital) que para p, q positivos vale

$$\mathrm{e}^{x^p} > x^q$$

para x suficientemente grande

(10) Seja $x > 0$ e $n > 1$. Deduza:

$$\frac{x}{n + x(n-1)} < (x+1)^{1/n} - 1 < \frac{x}{n}$$

Sugestão: Para a desigualdade da direita use o fato que a função $f(x) = (x+1)^{1/n}$, $x \geqslant 0$ é estritamente côncava. Para a desigualdade da direita use o cálculo diferencial e a *concavidade* de $f(x)$ para comparar a expressão $\dfrac{(x+1)^{1/n} - 1}{x}$ com a derivada $f'(x)$. Em seguida, use a *concavidade estrita* de $(x+1)^{(n-1)/n}$ para concluir.

(11) Deduza, usando qualquer ferramenta do cálculo, que

$$\begin{gathered} \text{se } x \geqslant -1, \text{ e } 0 < \alpha < 1, \text{ então} \\ (1+x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x \\ \text{se } \alpha < 0 \text{ ou } \alpha > 1, \text{ então} \\ (1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x \end{gathered}$$

Sendo que a igualdade nestas desigualdades ocorre se e somente se $x = 0$.

Uma outra forma útil das desigualdades acima é a seguinte:

$$\begin{gathered} y^\alpha \leqslant 1 - \alpha + \alpha y \\ \text{se } y \geqslant 0 \text{ e } 0 < \alpha < 1 \qquad (*) \\ y^\alpha \geqslant 1 - \alpha + \alpha y \\ \text{se } y \geqslant 0 \text{ e } \alpha > 1 \text{ ou } \alpha < 0 \end{gathered}$$

Sendo que a igualdade nestas desigualdades ocorre se e somente se $y = 1$.

(12) Use a desigualdade $(*)$ para mostrar que se $0 < \alpha < 1$ e se a, b são não negativos então

$$a^\alpha \, b^{1-\alpha} \leqslant \alpha \, a + (1-\alpha) b$$

Quando x e y são positivos, satisfazendo $x + y = 1$, fazendo $\alpha = x$ e $1 - \alpha = y$, obtenha

$$a^x b^y \leqslant xa + yb \qquad (**)$$

(13) sendo que a igualdade é válida, se e só se $a = b$. Mostre que a desigualdade $(**)$ pode ser escrita da seguinte forma

$$a^\alpha - b^\alpha < ab^{\alpha-1}(a-b), \qquad 0 < \alpha < 1$$

formulação esta que é deveras útil.

A desigualdade $(**)$ é suficientemente importante para apresentarmos uma demonstração para um número n de números reais positivos $a_1, \ldots a_n$ e números positivos $x_1, x_2, \ldots x_n$, satisfazendo $x_1 + x_2 + \ldots x_n = 1$. Afirmamos que neste caso vale também

$$a_1^{x_1} a_2^{x_2} \cdots a_n^{x_n} \leqslant \sum_{i=1}^n x_i a_i$$

Já sabemos que imbutida na desigualdade acima está a idéia de *convexidade* que produz uma demonstração alternativa (*desigualdade de Jensen*). Vamos prosseguir com uma demonstração por indução . Suponhamos que a propriedade esteja demonstrada para m (ou menor) números . Seja $x_1, \ldots x_{m+1}$ números positivos satisfazendo $x_1 + x_2 + \cdots + x_{m+1} = 1$. Coloquemos $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = \sigma$. Segue que

$$\begin{aligned} a_1^{x_1} a_2^{x_2} \cdots a_m^{x_m} a_{m+1}^{x_{m+1}} &= \left(a_1^{x_1/\sigma} a_2^{x_2/\sigma} \ldots a_m^{x_m/\sigma}\right)^\sigma a_{m+1}^{x_{m+1}} \\ &\leqslant \left(a_1^{x_1/\sigma} a_2^{x_2/\sigma} \ldots a_m^{x_m/\sigma}\right) \sigma + a_{m+1} x_{m+1} \end{aligned}$$

usando a propriedade para o caso de dois números. O argumento fica finalizado aplicando a hipótese de indução . Sendo que a igualdade é verificada se e somente se todos os números a_i são iguais.

(14) Mostre a desigualdade de Young, usando o item anterior: Se a, b são positivos, e se p, q com $p > 1$ satisfazem $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{(desigualdade de Young)}$$

sendo que vale a igualdade se e só se $a^p = b^q$.

(15) Mostre que se $a \geqslant b > 0$, e $a + b = 1$, então

$$a^a b^b \geqslant \frac{1}{2}$$

(16) Vamos agora demonstrar a clássica desigualdade de Hölder. sejam p, q números reais positivos, satisfazendo $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Se $a_1, \dots, a_n$ e $b_1, \dots, b_n$ são não negativos, então

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$

sendo que a igualdade é válida se e somente se $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, ou $a_1^p/b_1^q = a_2^p/b_2^q = \cdots a_n^p/b_n^q$.

O caso especial em que $p = q = 2$ é famoso e chamado de desigualdade de Cauchy.

A demonstração usa a desigualdade $(**)$ fazendo

$$A_i := \frac{a_i^p}{\sum_1^n a_i^p} \text{ e } B_i := \frac{b_i^q}{\sum_1^n b_i^q}$$

Complete a demonstração da desigualdade de Hölder, como exercício.

(17) Seja $-1 < \alpha < 0$. Deduza que

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} < \sum_{1}^{n} k^{\alpha} < \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

(18) Seja a sequência

$$u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{3}{3n+3p+1}$$

(a) Deduza que a sequência u_n é limitado superiormente, via uma desigualdade, comparando-a com a sequência

$$w_n = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{1+p/n}$$

Exiba uma cota superior para a sequência u_n.

(b) Dado $a > 0$ compare u_n, para n suficientemente grande, com v_n, onde

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{1+a+p/n}$$

(c) Deduza que $\lim_{n\to\infty} u_n$ existe e calcule este limite.

Observações adicionais informativas:

Considere o espaço $l^p(\mathbb{R})$, $p \geqslant 1$, consistindo no conjunto das seqüências de números reais $x = \{x_n\}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$$

Considere também $l^\infty(\mathbb{R})$, o conjunto de seqüências de números reais $x = \{x_n\}$, *limitadas.*

É um fato que $l^p(\mathbb{R})$, $p \geqslant 1$, é um espaço de Banach, com a norma

$$\|x\|_{l^p} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

A desigualdade triangular aqui é a desigualdade de Minkowski.

Além disso, $l^p(\mathbb{R})$, $p \geqslant 1$, é um espaço de Banach. Observe que que $l^\infty(\mathbb{R})$, com a norma

$$\|x\|_{l^\infty} := \sup_n |x_n|$$

é um espaço de Banach que contém os espaços l^p's ($p \geqslant 1$).

Vale a *desigualdade de Jensen*: Se $1 \leqslant q < p$, então

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^q \right)^{1/q} \tag{1}$$

Ou seja a função

$$p \to \|x\|_{l^p}, \qquad 1 \leqslant p < \infty$$

é decrescente. Na verdade, o limite $\|x\|_{l^p}$ quando $(p \to \infty)$ existe e é igual a $\|x\|_{l^\infty}$. Há uma relação de inclusão entre os espaços l^p, $p \geqslant 1$. Observamos que a desigualdade de Jensen é válida para $0 < q < p$. Além disso, observe que a inclusão entre os vários espaços l^p, $p \geqslant 1$, é *estrita*; primeiramente, que $l^1 \subsetneqq l^2$. Observamos que se $p > q \geqslant 1$, existe $r > 0$, tal que $\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$. A desigualdade de Hölder pode ser aplicada para mostrar a seguinte desigualdade entre *a média das potências* (que é válida para todo p, q satisfazendo $q < p$,):

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} |a_i|^q}{N} \right)^{1/q} \leqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} |a_i|^p}{N} \right)^{1/p} \tag{2}$$

Também é possível demonstrar A *desigualdade de Hardy*, diz que para $p > 1$, vale

$$\sum_{N=1}^{\infty}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}|a_i|}{N}\right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p \tag{3}$$

Vale que $l^2(\mathbb{R})$ é um espaço de Hilbert, ou seja, $l^2(\mathbb{R})$ é um espaço de Banach cuja norma provém de um produto interno.