

ANÁLISE REAL-2002.2-Lista2

Professor: Ricardo Sá Earp

Elementos de espaços métricos

Em toda esta lista (X, d) ou simplesmente X será um espaço métrico com distância d .

Nos próximos exercícios vamos revisar certos conceitos básicos topológicos de espaços métricos.

- 1) Mostre que para todo subconjunto A de X , o conjunto $\overset{\circ}{A}$ é aberto e A é aberto se e somente se $A = \overset{\circ}{A}$. Além mostre que \overline{A} é fechado e A é fechado, se e só se $A = \overline{A}$. Dê uma caracterização dos conjuntos fechados em termos de seqüências .
- 2) Sejam A e B dois subconjuntos de \mathbb{R} . Mostre que para o subconjunto $A \times B$ de \mathbb{R}^2 (produto cartesiano), valem as seguintes propriedades:

$$(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ, \quad \overline{(A \times B)} = \overline{A} \times \overline{B}$$
$$\partial(A \times B) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B)$$

Generalize este exercício para uma situação a mais abrangente possível!!

- 3) Mostre que se X é um espaço de Banach (ou seja; X é um espaço vetorial normado completo) e se A é um subespaço vetorial fechado de X , então A é espaço de Banach.
- 4) Mostre que se X é um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$, e se $\{x_n\}$ é uma seqüência de pontos de X , tal que a série $\sum_1^\infty x_n$ é *normalmente convergente*; isto é, $\sum_1^\infty \|x_n\| < \infty$, então a série $\sum_1^\infty x_n$ converge.
- 5) Mostre com todos os detalhes que duas normas quaisquer $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em \mathbb{R}^n , são equivalentes.

Você saberia dar um contraexemplo da afirmação acima, quando X é um espaço de Banach de dimensão infinita ?

Dizemos que uma subespaço A do espaço métrico X é *denso* em X se o fecho de A é X , ou seja $\overline{A} = X$. Dizemos que X é um espaço métrico separável, se X contém um subconjunto enumerável e denso.

- 6) Mostre que todo espaço Euclideano (espaço vetorial normado de dimensão finita) é separável, mostrando que \mathbb{R}^n é separável.
- 7) Mostre que se α é um número irracional então o subconjunto de números reais $\{\alpha m + n, n, m \in \mathbb{Z}\}$ é denso em \mathbb{R} . Desta informação o que você pode concluir sobre a aderência do conjunto $\{\cos n, n \in \mathbb{Z}\}$?
- 8) Considere o espaço $l^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$, consistindo no conjunto das seqüências de números reais $x = \{x_n\}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$$

Considere também $l^\infty(\mathbb{R})$, o conjunto de seqüências de números reais $x = \{x_n\}$, *limitadas*.

- a) Mostre com todos os detalhes que $l^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$, é um espaço de Banach (mostrando inclusive, com detalhes, que é completo!!) , com a norma

$$\|x\|_{l^p} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

- b) Mostre que $l^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$, é um espaço de Banach separável.
- c) Mostre que $l^\infty(\mathbb{R})$, com a norma

$$\|x\|_{l^\infty} := \sup_n |x_n|$$

é um espaço de Banach que contém os espaços l^p 's ($p \geq 1$).

Além disso, mostre que $l^\infty(\mathbb{R})$, não é separável.

- d) Mostre a *desigualdade de Jensen*: Se $1 \leq q < p$, então

$$(1) \quad \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^q \right)^{1/q}$$

Ou seja a função

$$p \rightarrow \|x\|_{l^p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

é decrescente. Na verdade, o limite $\|x\|_{l^p}$ quando $(p \rightarrow \infty)$ existe e é igual a $\|x\|_{l^\infty}$. *Sugestão* : Pense porque pode-se fazer uma normalização

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^q \right)^{1/q} = 1. \text{ Conclua uma relação de inclusão entre os espaços}$$

l^p , $p \geq 1$. Observamos que a desigualdade de Jensen é válida para $0 < q < p$, veja a referência 4, abaixo.

Além disso, mostre que a inclusão entre os vários espaços l^p , $p \geq 1$, é *estrita*; mostrando primeiramente, que $l^1 \subsetneq l^2$.

Observamos que se $p > q \geq 1$, existe $r > 0$, tal que $\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$. A desigualdade de Hölder pode ser aplicada para mostrar a seguinte desigualdade entre a *média das potências* (que é válida para todo p, q satisfazendo $q < p$, veja na ref. 4):

$$(2) \quad \left(\frac{\sum_{i=1}^N |a_i|^q}{N} \right)^{1/q} \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^N |a_i|^p}{N} \right)^{1/p}$$

- e) Mostre a desigualdade acima, observando que esta não contradiz (1). Também é possível demonstrar (2), usando *convexidade*. Você saberia fazer isto ?

A *desigualdade de Hardy*, diz que para $p > 1$, vale

$$(3) \quad \sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^N |a_i|}{N} \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p$$

Tal desigualdade será estudada na ocasião que estivermos focalizando diferenciabilidade.

- 9) Mostre com todos os detalhes, mostrando inclusive a completude, que $l^2(\mathbb{R})$ é um espaço de Hilbert, ou seja, $l^2(\mathbb{R})$ é um espaço de Banach cuja norma provém de um produto interno.

- 10) Exiba exemplos variados de subespaços métricos fechados e limitados que não sejam compactos.
- 11) Exiba mais de um exemplo de conjuntos compactos em \mathbb{R} e \mathbb{R}^2 , com interior vazio, e que não sejam enumeráveis.
- 12) Será que o fecho da bola unitária num espaço de Banach, é necessariamente um conjunto compacto ? Discuta exemplos.
- 13) Exiba um exemplo de cobertura de um intervalo aberto limitado da reta que não admita subcobertura finita.
- 14) Exiba conjuntos limitados em \mathbb{R} e \mathbb{R}^2 , com um número pré-determinado n de pontos de acumulação .
- 15) Mostre com todos os detalhes que os subconjuntos compactos e limitados de \mathbb{R}^n são exatamente os conjuntos fechados e limitados.
- 16) Mostre que todo espaço métrico compacto é separável.
- 17) Seja $\{K_\alpha\}$, uma coleção de compactos do espaço métrico X , com a propriedade que a interseção de um número finito qualquer de tais K_α 's sempre tem interseção não vazia. Mostre que $\bigcap K_\alpha$ não é vazia.

Dizemos que um subconjunto A de X é *perfeito* se A é fechado e todo ponto de A é ponto de acumulação de A .

- 18) Mostre que todo subconjunto fechado de um espaço *separável* X é a união de um conjunto perfeito (possivelmente vazio) com um conjunto (no máximo) enumerável. Conclua que todo subconjunto fechado enumerável de um espaço Euclideano tem pontos isolados. O que acontece se a hipótese "fechado" for relaxada ?

Exiba exemplos de conjuntos perfeitos, com interior vazio.

- 19) Mostre que o produto cartesiano de espaços métricos compactos é um espaço compacto.

BIBLIOGRAFIA SUCINTA

1. Augus E. Taylor. *Introduction to Functional Analysis*. John Wiley and Sons, Inc, 1958.
2. Elon Lages Lima. *Curso de Análise Volume 1*. Projeto Euclides, 1995.

3. Elon Lages Lima. *Elementos de Topologia Geral*. Projeto Euclides, 1970.
4. G. H. Hardy, J. E. Littlewood e G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge Press , 1973.
5. Ralph P. Boas, Jr. *A Primer of Real Functions*. Math. Assoc. of Amer. John Wiley and Sons, Inc. 1960.
6. Walter Rudin. *Princípios de Análise Matemática*. Livro Técnico, N, 1971.
7. Srishti D. Chatterji. *Cours d'Analyse 1,2*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1997.