ANÁLISE REAL-2002.2–Lista2

Professor: Ricardo Sá Earp

Elementos de espaços métricos

Em toda esta lista (X, d) ou simplesmente X será um espaço métrico com distância d.

Nos próximos exercícios vamos revisar certos conceitos básicos topológicos de espaços métricos.

1) Mostre que para todo subconjunto A de X, o conjunto $\overset{\circ}{A}$ é aberto e A é aberto se e somente se $A = \overset{\circ}{A}$. Além mostre que $\overline{A}$ é fechado e A é fechado, se e só se $A = \overline{A}$. Dê uma caracterização dos conjuntos fechados em termos de seqüências .
2) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$. Mostre que para o subconjunto $A \times B$ de $\mathbb{R}^2$ (produto cartesiano), valem as seguintes propriedades:

$$(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ, \qquad \overline{(A \times B)} = \overline{A} \times \overline{B}$$
$$\partial(A \times B) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B)$$

   Generalize este exercício para uma situação a mais abrangente possível!!
3) Mostre que se X é um espaço de Banach (ou seja; X é uma espaço vetorial normado completo) e se A é um subespaço vetorial fechado de X, então A é espaço de Banach.
4) Mostre que se X é um espaço de Banach com norma $\|,\|$, e se $\{x_n\}$ é uma seqüência de pontos de X, tal que a série $\sum_1^\infty x_n$ é *normalmente convergente*; isto é, $\sum_1^\infty \|x_n\| < \infty$, então a série $\sum_1^\infty x_n$ converge.
5) Mostre com todos os detalhes que duas normas quaisquer $\|\|_1$ e $\|\|_2$ em $\mathbb{R}^n$, são equivalentes.
   Você saberia dar um contraexemplo da afirmação acima, quando X é um espaço de Banach de dimensão infinita ?

Dizemos que uma subespaço A do espaço métrico X é *denso* em X se o fecho de A é X, ou seja $\overline{A} = X$. Dizemos que X é um espaço métrico separável, se X contém um subconjunto enumerável e denso.

6) Mostre que todo espaço Euclideano (espaço vetorial normado de dimensão finita) é separável, mostrando que $\mathbb{R}^n$ é separável.
7) Mostre que se α é um número irracional então o subconjunto de números reais $\{\alpha m + n,\ n, m \in \mathbb{Z}\}$ é denso em $\mathbb{R}$. Desta informação o que você pode concluir sobre a aderência do conjunto $\{\cos n, n \in \mathbb{Z}\}$?
8) Considere o espaço $l^p(\mathbb{R})$, $p \geqslant 1$, consistindo no conjunto das seqüências de números reais $x = \{x_n\}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$$

Considere também $l^\infty(\mathbb{R})$, o conjunto de seqüências de números reais $x = \{x_n\}$, *limitadas.*

a) Mostre com todos os detalhes que $l^p(\mathbb{R})$, $p \geqslant 1$, é um espaço de Banach (mostrando inclusive, com detalhes, que é completo!!) , com a norma

$$\|x\|_{l^p} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

b) Mostre que $l^p(\mathbb{R})$, $p \geqslant 1$, é um espaço de Banach separável.
c) Mostre que $l^\infty(\mathbb{R})$, com a norma

$$\|x\|_{l^\infty} := \sup_n |x_n|$$

é um espaço de Banach que contém os espaços l^p's ($p \geqslant 1$).

Além disso, mostre que $l^\infty(\mathbb{R})$, não é separável.

d) Mostre a *desigualdade de Jensen*: Se $1 \leqslant q < p$, então

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^q \right)^{1/q} \tag{1}$$

Ou seja a função

$$p \to \|x\|_{l^p}, \qquad 1 \leqslant p < \infty$$

é decrescente. Na verdade, o limite $\|x\|_{l^p}$ quando $(p \to \infty)$ existe e é igual a $\|x\|_{l^\infty}$.*Sugestão* : Pense porque pode-se fazer uma normalização $\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^q\right)^{1/q} = 1$. Conclua uma relação de inclusão entre os espaços l^p, $p \geqslant 1$. Observamos que a desigualdade de Jensen é válida para $0 < q < p$, veja a referência 4, abaixo.
Além disso, mostre que a inclusão entre os vários espaços l^p, $p \geqslant 1$, é *estrita*; mostrando primeiramente, que $l^1 \subsetneqq l^2$.
Observamos que se $p > q \geqslant 1$, existe $r > 0$, tal que $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q}$. A desigualdade de Hölder pode ser aplicada para mostrar a seguinte desigualdade entre a *média das potências* (que é válida para todo p, q satisfazendo $q < p$, veja na ref. 4):

$$(2) \qquad \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} |a_i|^q}{N}\right)^{1/q} \leqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} |a_i|^p}{N}\right)^{1/p}$$

e) Mostre a desigualdade acima, observando que esta não contradiz (1). Também é possível demonstrar (2), usando *convexidade*. Você saberia fazer isto ?

A *desigualdade de Hardy*, diz que para $p > 1$, vale

$$(3) \qquad \sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} |a_i|}{N}\right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p$$

Tal desigualdade será estudada na ocasião que estivermos focalizando diferenciabilidade.

9) Mostre com todos os detalhes, mostrando inclusive a completude, que $l^2(\mathbb{R})$ é um espaço de Hilbert, ou seja, $l^2(\mathbb{R})$ é um espaço de Banach cuja norma provém de um produto interno.

10) Exiba exemplos variados de subespaços métricos fechados e limitados que não sejam compactos.
11) Exiba mais de um exemplo de conjuntos compactos em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$, com interior vazio, e que não sejam enumeráveis.
12) Será que o fecho da bola unitária num espaço de Banach, é necessariamente um conjunto compacto ? Discuta exemplos.
13) Exiba um exemplo de covertura de um intervalo aberto limitado da reta que não admita subcovertura finita.
14) Exiba conjuntos limitados em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$, com um número pré-determinado n de pontos de acumulação .
15) Mostre com todos os detalhes que os subconjuntos compactos e limitados de $\mathbb{R}^n$ são exatamente os conjuntos fechados e limitados.
16) Mostre que todo espaço métrico compacto é separável.
17) Seja $\{K_\alpha\}$, uma coleção de compactos do espaço métrico X, com a propriedade que a interseção de um número finito qualquer de tais K_α's sempre tem interseção não vazia. Mostre que $\cap K_\alpha$ não é vazia.

    Dizemos que um subconjunto A de X é *perfeito* se A é fechado e todo ponto de A é ponto de acumulação de A.
18) Mostre que todo subconjunto fechado de um espaço *separável* X é a união de um conjunto perfeito (possivelmente vazio) com um conjunto (no máximo) enumerável. Conclua que todo subconjunto fechado enumerável de um espaço Euclideano tem pontos isolados. O que acontece se a hipótese "fechado" for relaxada ?
    Exiba exemplos de conjuntos perfeitos, com interior vazio.
19) Mostre que o produto cartesiano de espaços métricos compactos é um espaço compacto.

BIBLIOGRAFIA SUCINTA

1. Augus E. Taylor. *Introduction to Functional Analysis.* John Wiley and Sons, Inc, 1958.

2. Elon Lages Lima. *Curso de Análise Volume 1.* Projeto Euclides, 1995.

3. Elon Lages Lima. *Elementos de Topologia Geral.* Projeto Euclides, 1970.

4. G. H. Hardy, J. E. Littlewood e G. Pólya. *Inequalities.* Cambridge Press , 1973.

5. Ralph P. Boas, Jr. *A Primer of Real Functions.* Math. Assoc. of Amer. John Wiley and Sons, Inc. 1960.

6. Walter Rudin. *Princípios de Análise Matemática.* Livro Técnico, N, 1971.

7. Srishti D. Chatterji. *Cours d'Analyse 1,2.* Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1997.