# LISTA 2 DE ANÁLISE REAL 2009

RICARDO SA EARP

## ***Desigualdades, sequências e séries***

(1) Se $x, y, z$ são números reais positivos satisfazendo $x^3 + y^3 = z^3$, deduza que
$$\left(\frac{xy}{z^2}\right)^3 \leqslant \frac{1}{4}$$

(2) Seja $-1 < \alpha < 0$. Deduza que
$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} < \sum_{1}^{n} k^{\alpha} < \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

Tente dar duas deduções diferentes.

(3) Deduza que se $x, y, z$ são números reais positivos satisfazendo $x^4 + y^4 + z^4 = 27$, então
$$\left(\frac{x^4 + y^4 + z^4}{3}\right)^{1/4} \geqslant \frac{x+y+z}{3}$$
e conclua que $x + y + z \leqslant 3\sqrt{3}$.

(4) Seja $x > 0$ e $n > 1$. Deduza:
$$\frac{x}{n + x(n-1)} < (x+1)^{1/n} - 1 < \frac{x}{n}$$

(5) Deduza a desigualdade de Bohr: Se $c > 0$ então
$$|a+b|^2 \leqslant (1+c)|a|^2 + \left(1 + \frac{1}{c}\right)|b|^2$$

(6) Seja $\sum_{n}^{\infty} a_n z^n$ uma série que é absolutamente convergente no intervalo $(-R, R)$, e é divergente no intervalo $|z| > R$.
   (a) Deduza que se $\limsup_{n\to\infty} |a_n| < \infty$ então $R \geqslant 1$.
   (b) Deduza que se $\liminf_{n\to\infty} |a_n| \geqslant \alpha > 0$ e $\limsup_{n\to\infty} |a_n| < \infty$ então $R = 1$.

(7) Deduza que se $\sum_n |a_n| < \infty$ as seguintes séries são convergentes

$$\sum_n |a_n a_{n+1}|^{1/2}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{|a_n|^{1/2}}{n}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{|a_n|^{1/2}}{n^{1/2+p}}, \qquad p > 0.$$

(8) Deduza que as séries abaixo, convergem nos intervalos $\mathcal{C}$ dados
   (a) $\sum_n (z/(1+z))^n$. $\mathcal{C} = \{z; z > -1/2\}$.
   (b) $\sum_n z^n/(1+z^n)$. $\mathcal{C} = \{z; |z| < 1\}$.

(9) Deduza com detalhes os testes de Cauchy e D'alembert de convergência absoluta das séries de potências $\sum a_n z^n$.

(10) Determine um intervalo de convergência para as séries potências abaixo.
   (a) $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n 2^n z^{2n+2}$.
   (b) $\sum_{n\geqslant 0} 2^{\log n} z^n$.
   (c) $\sum_{n\geqslant 0} (\sin n) z^n$.