LISTA 2 DE ANÁLISE REAL 2010

RICARDO SA EARP

Espaços vetoriais normados

(1) Seja E um espaço vetorial normado com norma $\|\|$. Deduza que $\|\| : E \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

(2) Sejam $E_1, \ldots, E_n$ espaços vetoriais normados cujas normas são $\|\|_1, \ldots, \|\|_n$, respectivamente.
Seja $E := E_1 \times \cdots \times E_n$ o espaço produto.
  (a) Para cada $v = (v_1, \ldots, v_n) \in E$ definimos $\|v\|_\infty := \max\{\|v_1\|, \ldots, \|v_n\|\}$.
  Deduza que $(E, \|\|_\infty)$ é um espaço vetorial normado. Note que $(E, \|\|_\infty)$ é um espaço de Banach, se e só se cada $(E_i, \|\|_i)$ é um espaço de Banach.
  (b) Para cada $v = (v_1, \ldots, v_n) \in E$ definimos $\|v\|_1 := \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|_i$.
  Deduza que $(E, \|\|_1)$ é um espaço vetorial normado.
  (c) Para cada $v = (v_1, \ldots, v_n) \in E$ definimos $\|v\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|_i^2\right)^{1/2}$.
  Deduza que $(E, \|\|_2)$ é um espaço vetorial normado.

(3) (a) Deduza com detalhes que o espaço $\ell^p, p \geqslant 1$ definido por

$$\ell^p := \{x = \{x_n\}(\text{sequências de números reais}); \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$$

é um espaço vetorial normado com a norma (ℓ^p é uma "espaço de Banach").

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$$

  (b) Além disso, deduza com detalhes que $\ell^\infty := \{x = \{x_n\}; \, |x_n| \leqslant C\}$, onde C é uma constante $= \{$sequências de números reais limitadas$\}$, é um espaço vetorial normado com a norma $\|x\| = \sup_n |x_n|$
  (ℓ^∞ é uma "espaço de Banach").
  (c) Deduza que a norma em ℓ^2 é proveniente de um produto interno (ℓ^2 é um "espaço de Hilbert").

(d) Deduza que a norma em ℓ^∞ não é proveniente de um produto interno.
(e) Deduza que se $0 < p < q$, então

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q\right)^{1/q} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \qquad \text{(Desigualdade de Jensen).}$$

concluindo que se $1 \leqslant p < q$) então $\ell^p \subset \ell^q$.
(f) Deduza que $\|x\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{p\to\infty} |x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{1/p}$.
(g) Dê um exemplo de uma sequência $x = \{x_n\}$ que está em ℓ^2 mas, não está em ℓ^1. Generalize para uma sequência que está em ℓ^q mas, não está em ℓ^p, para $1 \leqslant p < q$. Deduza que a inclusão $\ell^p \subset \ell^q$, se $1 \leqslant p < q$, é estrita.
(h) Usando obrigatoriamente a desigualdade de Hölder (cf: Lista 1), deduza a seguinte desigualdade entre *a média das potências* (que é válida para todo p, q satisfazendo $p < q$,):

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} |a_i|^p}{N}\right)^{1/p} \leqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} |a_i|^q}{N}\right)^{1/q} \tag{2}$$

(i) Agora, deduza a desigualdade entre *a média das potências* acima, usando obrigatoriamente o conceito de *convexidade*.

(4) Dados números positivos $a_i > 0, i = 1, \ldots, n$ e números não negativos $b_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, n$, e dado $r > 1$ deduza a desigualdade (desigualdade de Minkowski de índice $r > 1$)

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^r + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^r\right]^{1/r} \leqslant \sum_{i=1}^{n} (a_i^r + b_i^r)^{1/r}$$

Sugestão: Considere a função $f(x) = (1 + x^r)^{1/r}, x > 0$.

(5) Procure estender a definição de convexidade para uma curva simples e fechada de $\mathbb{R}^2$.

(6) Seja E um espaço vetorial e sejam $\|\|_1$ e $\|\|_2$ duas normas em E e escrevemos $E_1 = (E, \|\|_1)$ e $E_2 = (E, \|\|_2)$. Dizemos que $\|\|_1$ " é mais fina" que $\|\|_2$, se existe uma constante positiva $c > 0$, tal que $\|x\|_2 \leqslant c\|x\|_1$, $\forall x \in E$.
(a) Deduza que a *topologia* em $E_1 = (E, \|\|_1)$ é mais fina que a *topologia* em $E_2 = (E, \|\|_2)$, ou seja se $U \subset E$ é um aberto de E_2 então U é também um aberto de E_1.

(b) Seja $\{x_n\}$ uma sequência em E e seja $x \in E$. Deduza que se $x_n \to x$ em E_1 então $x_n \to x$ em E_2. Em particular, deduza que se uma sequência $\{x_n\}$ tem norma em E_1 arbitrariamente pequena para n suficientemente grande, então também tem norma em E_2 abitrariamente pequena para n suficientemente grande.

(c) Deduza que a aplicação identidade
$\mathrm{Id} : E_1 = (E, \|\|_1) \to E_2 = (E, \|\|_2)$ é contínua.

(7) Seja $C^0[a, b]$ o conjunto das funções contínuas reais definidas no intervalo fechado $[a, b]$. Seja $f \in C^0[a, b]$. Considere $\|f\|_\infty := \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$. Considere também $\|f\|_1 = \int\limits_a^b |f(x)|dx$. Finalmente considere $\|f\|_2 = \int\limits_a^b |f(x)|^2 dx$.

(a) Deduza que $(C^0[a, b], \|\|_\infty)$ é um espaço vetorial normado ("espaço de Banach").

(b) Deduza que $(C^0[a, b], \|\|_1)$ é um espaço vetorial normado ("espaço de Banach").

(c) Deduza que $(C^0[a, b], \|\|_2)$ é um espaço vetorial normado cuja norma é proveniente de um produto interno ("espaço de Hilbert").

(d) Deduza que a norma $\|\|_\infty$ mais fina que a norma $\|\|_1$, mais que $\|\|_1$ *não é mais fina do que* $\|\|_\infty$.

(e) Deduza que a norma $\|\|_\infty$ mais fina que a norma $\|\|_2$, mais que $\|\|_2$ *não é mais fina do que* $\|\|_\infty$.

(f) Deduza que a norma $\|\|_2$ mais fina que a norma $\|\|_1$, mais que $\|\|_1$ *não é mais fina do que* $\|\|_2$.

(8) Seja $C^1[a, b]$ o conjunto de todas as funções $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que possuem derivadas contínuas em todos os pontos. Defina $\|f\|_1 = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)| + \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|$.

(a) Deduza que $(C^1[a, b], \|\|_1)$ é um espaço vetorial normado ("espaço de Banach").

(b) Generalize esta definição de espaço considerando o conjunto de todas as funções $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que possuem derivadas de ordem k contínuas.

(9) (*Funções convexas num espaço vetorial*).

Seja E um espaço vetorial. Uma função $\varphi : E \to (-\infty, \infty]$ é chamada de convexa se
$\varphi(tx + (1 - t)y) \leqslant t\varphi(x) + (1 - t)\varphi(y)$, $\forall, x, y \in E$, $t \in [0, 1]$.

Dizemos que um subconjunto $A \subset E$ é convexo, se
$tx + (1-t)y \in A$, $\forall x, y \in A$, $\forall t \in [0,1]$.

Defina-se a seguinte região de produto $E \times \mathbb{R}$:
epi $= \{(x,\lambda) \in E \times \mathbb{R};\ \varphi(x) \leqslant \lambda\}$.

(a) Desenhe um gráfico de uma função convexa real de uma variável real e identifique o conjunto epi.
(b) Deduza que se φ é uma função convexa, então epi é um subconjunto convexo de $E \times \mathbb{R}$.
(c) Deduza que se φ é uma função convexa, então para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in E, \varphi(x) \leqslant \lambda\}$ é um conjunto convexo.
(d) Deduza que se φ_1 e φ_2 são funções convexas então $\varphi_1 + \varphi_2$ é convexa.

(10) (*Funções semi-contínuas inferiormente e o teorema fundamental do Cálculo Variacional*). Uma função $\varphi : E \to (-\infty, \infty]$ é chamada de *semi-contínua inferiormente* (s.c.i), se para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ o conjunto $\{x \in E, \varphi(x) \leqslant \lambda\}$ é fechado.

(a) Deduza que φ é s.c.i se e somente se para todo $x \in E$ e todo $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança V de x tal que
$\varphi(y) \geqslant \varphi(x) - \varepsilon$, $\forall y \in V$.

Consequentemente, deduza que se φ é s.c.i e se $x_n \to x$, então $\limsup\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) \geqslant \varphi(x)$.

OBS: O teorema fundamental do Cálculo Variacional diz o seguinte:
Seja E um espaço de Banach reflexivo (um espaço vetorial de dimensão finita é reflexivo. Um espaço de Hilbert é reflexivo). Seja $A \subset E$ um conjunto convexo fechado, não vazio. Seja $\varphi : A \to (-\infty, \infty]$, uma função convexa s.c.i, $\varphi \not\equiv \infty$; tal que

$$\lim_{\|x\|\to\infty, x\in A} \varphi(x) = \infty \qquad (\textit{nenhuma hipótese se } A \textit{ é limitado})$$

Segue então que φ atinge um mínimo (global) em A; ou seja, existe $x_0 \in A$ tal que $\varphi(x_0) = \inf\limits_{x\in A} \varphi(x)$.

A referência para este teorema e para outros teoremas da Análise Funcional que serão citados doravante são as seguintes : *Analyse Fonctionnelle.* Haïm Brezis. Masson, 1983. Ou *Introduction to functional analysis.* A. Taylor, John Wiley & sons, 1958.

(11) Considere $(E, \|\|_E)$ e $(F, \|\|_F)$ espaços vetoriais normados (que, possivelmente, têm dimensão infinita). Deduza que as afirmações abaixo sobre uma transformação (operador) linear $T : E \to F$ são equivalentes.

(a) $T : E \to F$ é contínua; isto é, fixado $a \in E$ qualquer, segue então que, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $\|x - a\|_E < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(a)\|_F < \varepsilon$.

(b) T é contínua em $0 \in E$.

(c) Existe $c > 0$ tal que $\|T(x)\|_F \leqslant c\|x\|_E$, $\forall x \in E$.

(d) Existe $c > 0$ tal que $\|T(x - y)\|_F \leqslant c\|x - y\|_E$, $\forall x, y \in E$.

(12) Assuma que $T : E \to F$ é linear, injetora e sobrejetora. Deduza que $T : E \to F$ é um *homeomorfismo*, se existem constantes $a > 0$ e $b > 0$ tal que $a\|x\|_E \leqslant \|T(x)\|_F \leqslant b\|x\|_E$.

OBS: *Se E e F são espaços de Banach e T é um operador linear contínuo e sobrejetivo de E em F então T é uma aplicação aberta: T leva abertos de E em abertos de F (Este é o "teorema da aplicação aberta da Análise Funcional").*

(13) Assumindo que E e F são espaços de Banach deduza que se $T : E \to F$ é linear, injetora e sobrejetora então T^{-1} é contínua de F sobre E.

(14) Seja $\mathcal{L}(E, F)$ o conjunto de todas as transformações lineares contínuas $T : E \to F$. Seja $\|T\| := \sup\{|f(x)|,\, x \in E, \|x\| = 1\}$.

(a) Deduza que $(\mathcal{L}(E, F), \|\|)$ é um espaço vetorial normado ("Se F é espaço de Banach então $(\mathcal{L}(E, F), \|\|)$ é também um espaço de Banach").

(15) (*Lema de Riesz e teorema de Riesz: Caracterização dos espaços vetorias normados de dimensão finita*).

Vamos fazer o início da teoria de Riesz-Fredholm da Análise Funcional, dando um roteiro e deixando que você complete alguma demonstração.

Seja E um espaço vetorial normado e seja $M \subset E$, um subconjunto de E, $M \neq E$. Seja $v \in E; v \notin M$. Defina $\text{dist}(v, M) := \inf\{\|v - m\|;\, m \in M\}$.

(16) Deduza que se M é fechado, então $\text{dist}(v, M) > 0$.

(17) (Lema de Riesz). Seja E um espaço vetorial normado e seja $M \subset E$, um subconjunto fechado, $M \neq E$. Deduza que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists u \in E, \quad \|u\| = 1 \quad \text{e} \quad \text{dist}(u, M) \geqslant 1 - \varepsilon$$

Sugestão: Seja $v \in E$ com $v \notin M$. Do item anterior segue que $d := \text{dist}(v, M) > 0$. Escolha $m_0 \in M$, $d \leqslant \|v - m_0\| \leqslant \frac{d}{1-\varepsilon}$.

Defina $u := \frac{v-m_0}{\|v-m_0\|}$ e deduza que tal u responde a pergunta do enunciado, calculando $\|u-m\|$, para um $m \in M$ arbitrário.

(18) (*Teorema de Riesz*). Deduza o seguinte:
Seja E um espaço vetorial normado tal que a bola unitária fechada $B_E := \{x \in E, \|x\| \leqslant 1\}$ é compacta. Deduza então que E tem dimensão finita.
Sugestão: A demonstração será por absurdo. Se E tem dimensão infinita existe uma sequência de subspaços de dimensão finita $\{E_n\}$ de E, tais que $E_{n-1} \subset E_n$, $E_{n-1} \neq E_n$. O lema de Riesz permite encontrar uma sequência $\{u_n\}$, $u_n \in E_n$, $\|u_n\| = 1$ tal que $\text{dist}(u_n, E_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}$. Deduza que tal u_n não pode ter uma subsequência convergente. Daí conclua o resultado.

(19) Usando o teorema de Riesz deduza que ℓ^2 não é localmente compacto .

OBS:

- *O teorema de Kakutani diz que se E é um espaço de Banach, então E é "reflexivo" se e somente se B_E é compacto para a "topologia fraca".*
- *Sejam E e F espaços vetoriais normados. Quando $F = \mathbb{R}$ dizemos que uma transformação linear contínua $f : E \to \mathbb{R}$ é um funcional linear. O teorema de Hahn-Banach, diz que se $G \subset E$ é um subespaço vetorial e se $g : G \to \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo, então existe uma extensão linear e contínua $f : E \to \mathbb{R}$ de g a todo o espaço E mantendo a norma, i.e $\|f\| = \|g\|$.*
  Existem também formas geométricas do teorema de Hahn-Banach com várias conquências importantes na Análise Funcional. Por exemplo, vale o seguinte resultado:
  Seja $F \subset E$ um sub espaço próprio de E ($F \neq E$). Segue então que existe um funcional linear contínuo $f : E \to \mathbb{R}$ não identicamente nulo ($f \not\equiv 0$), tal que $f(x) = 0, \forall x \in F$.

(20) Considere $(E, \langle , \rangle)$ um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle , \rangle$. Deduza que o produto interno $\langle , \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

(21) Dê exemplo de um conjunto ortonormal infinito em ℓ^2.

(22) Seja $C^0[0, 2\pi]$ o espaço das funções contínuas com a norma $\|f\|_2 = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$. Considere o conjunto
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \ldots$ Deduza que S é ortonormal.

(23) Seja S um conjunto ortonormal de um espaço um espaço vetorial E munido de um produto interno $\langle , \rangle$. Deduza que cada par de elementos distintos de S estão a uma distância igual a $\sqrt{2}$.

(24) Considere $(E, \langle , \rangle)$ um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle , \rangle$. Seja $S \subset$ um conjunto ortonormal de E.

(a) Seja $u_1, \ldots, u_n$ uma coleção finita de elementos distintos de S. Seja $x \in E$. Deduza que

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle x, u_i \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2 \qquad \text{(desigualdade de Bessel)}$$

Sugestão: Considere o vetor $x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i$.

(b) Seja $x \in E$. Deduza que o conjunto dos pontos $u \in S$ tal que $\langle x, u \rangle \neq 0$ é finito ou enumerável.
Sugestão: Dado $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto dos pontos $u \in S$ tal que $|\langle x, u \rangle| \geqslant \frac{1}{n}$.

(c) Sejam x, y pontos de E. Deduza que

$$\sum_{u \in S} |\langle x, u \rangle \langle y, u \rangle| \leqslant \|x\| \|y\|$$

(25) Seja E um espaço vetorial espaço vetorial munido de um produto interno $\langle , \rangle$. Vamos assumir que E seja completo (quando E não tem dimensão finita E é chamado de "espaço de Hilbert"). Seja $\{u_n, n = 1, \ldots\}$ um conjunto ortonormal de E infinito e enumerável.

(a) Deduza que a série $\sum_{i=1}^{\infty} c_n u_n$ é convergente se e só se $\sum_{i=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$. Neste caso, seja $x := \sum_{i=1}^{\infty} c_n u_n$. Deduza a seguinte relação: $c_n = \langle x, u_n \rangle$.
Sugestão: Considere a sequência das somas parciais em E, dada por $s_n = \sum_{i=1}^{n} c_n u_n$, mostrando que esta é uma sequência de Cauchy, se e só se $\sum_{i=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$. Em seguida, prove que $c_i = \langle s_n, u_i \rangle$ e use a continuidade do produto interno.

OBS: *O teorema de Riesz-Fischer da teoria das séries de Fourier realiza concretamente o teorema acima. O teorema diaz que* *dadas sequências* $a_0, a_1, a_2, \dots$ *e* $b_1, b_2, \dots$ *tais que*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) < \infty$$

então existe uma função $x(t)$ *em* $L^2(0, 2\pi)$ *tendo* a_n *e* b_n *como seus coeficientes de Fourier, i.e*

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos nt \, \mathrm{d}t, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin nt \, \mathrm{d}t$$

A identidade de Parseval diz que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

Exercício: relacione os a_n *e* b_n *com os* c_n*, dados no exercício anterior.*