ANÁLISE REAL-2002.2–Lista3

Professor: Ricardo Sá Earp

Estimativas numéricas, seqüências, séries de números reais Séries de potências

Estimativas numéricas

1) Vamos neste exercício fazer uma estimativa para $\sqrt{2}$, envolvendo um estudo interessante de seqüência e recorrência.

a) Mostre que para todo natural $n \neq 0$, o número $\left(3+2\sqrt{2}\right)^n$, se escreve de *maneira única* da forma

$$a_n + b_n\sqrt{2}$$

onde a_n e b_n são números naturais. Além disso, mostre que $\left(3+2\sqrt{2}\right)^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ se escreve da forma $a_n - b_n\sqrt{2}$ (mesmos a_n e b_n).

b) Qual estrutura algébrica natural tem o conjunto $\{\left(3+2\sqrt{2}\right)^n, n \in \mathbb{Z}\}$?

c) Considere a seqüência $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

i) Mostre que $u_{n+1} = \dfrac{3u_n+4}{2u_n+3}$, e mostre por recorrência $u_n > \sqrt{2}$. Além disso, conclua que $\{u_n\}$ é uma seqüência estritamente decrescente.

e) Levando em conta o que foi feito acima e uma desigualdade elementar numérica mostre que

$$0 < u_n - \sqrt{2} < \frac{1}{b_n 5^n}$$

f) Mostre que $a_8 = 665857$, e $b_8 = 470832$, mostrando em seguida que

$$0 < u_8 - \sqrt{2} < \frac{10^{-5}}{29427 \cdot 125}$$

Obtenha uma aproximação de $\sqrt{2}$, com 11 algarismos exatos.

2) Qual é o maior dentre os números $(11!)^{12}$ e $(12!)^{11}$? *Sugestão* : O que você pode dizer sobre a monotonicidade da seqüência $\sqrt[n]{n!}$?

3) Mostre que a seqüência $\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}$, é estritamente decrescente para $n \geqslant 5$ usando obrigatoriamente desigualdades elementares incluindo por exemplo o conhecimento da seqüência $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$, objeto de estudo do exercício 2) c) da Lista 1; veja equações $(*)$ e $(**)$ que aparece numa *Nota* logo após o exercício 41) abaixo. *Não é permitido o uso do cálculo diferencial para resolver este problema.* Como aplicação, determine o maior dentre os números $\sqrt[5]{5}+\sqrt[8]{8}$ e $\sqrt[6]{6}+\sqrt[7]{7}$.

O próximo exercício ficou um pouco perdido entre as desigualdades da lista 1 e gostaria de recolocá-lo aqui.

4) Levando em conta a série de Taylor da função cosseno,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdots$$

fazendo um raciocínio elementar direto (veja dica no papo sobre a série binomial abaixo), mostre que

$$0 < 1 - \cos(\frac{1}{n}) < \frac{1}{2 \cdot 10^4} \qquad \text{se} \quad n > 100$$

Vamos recordar a *série binomial* e a fórmula de Abel-Newton que enunciaremos a seguir. Dado $\alpha \neq 0$, um número real não nulo define-se para $n > 0$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \qquad e \quad \binom{\alpha}{0} = 1$$

Dado um número real $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ que não seja um inteiro $\geqslant 0$ (caso trivial da conhecida fórmula de Newton), tem-se a fórmula de Abel-Newton

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n, \qquad (|z| < 1)$$

sendo o raio de convergência da série igual a 1 (isto faz parte do nosso estudo sobre séries de potências). Note que a série para $z = x \in \mathbb{R}$ e $0 < \alpha < 1$ é *alternada.*

5) Usando as considerações acima, mostre que encontre um valor aproximado de $\sqrt{1632}$, estimando o erro do seu cálculo, explicando se o erro é por falta ou por

excesso, e determinando o número de algarismos corretos de sua aproximação e dizendo (se possível) quais são os dois primeiros algarismos significativos exatos após a vírgula.

6) Usando uma idéia que já apareceu antes, *estime* quantos zeros após a vírgula o algarismo $\left(\sqrt{50}+7\right)^{100001}$, possui (com certeza) na sua expansão decimal.

7) (*O número áureo*). Usando o método de diferenças finitas (veja mais adiante), mostre que a equação linear (homogênea) de diferenças de segunda ordem

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \qquad n \geqslant 2$$

   a) com condição inicial $a_0 = a_1 = 1$, tem solução única a_n, satisfazendo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|^{1/n}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{(número áureo)}$$

      i) Encontre uma aproximação para o número áureo com 4 algarismos exatos.

   b) Encontre o raio de convergência da série

$$\sum_{1}^{\infty} a_n z^n$$

8) Considere a equação de diferenças

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} + x_n}{2}$$

satisfazendo a condição inicial $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$. Mostre que $x_n \to \dfrac{2}{3}$, quando $(n \to \infty)$. Para que valores n temos que x_n é um valor aproximado de $2/3$, com erro $< 1/(3 \cdot 2^{1000})$?

9) Usando a série de Taylor de $\cos x$, calcule

$$\int_0^1 \frac{\cos(x^2) - 1}{x^4}\,\mathrm{d}x$$

com dois decimais exatos. A dica está no papo sobre a série binomial, logo antes do item 4).

10) Mostre a relação (sem usar o cálculo diferencial)

$$(1) \qquad \sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n}-\sqrt{n-1}, \qquad n \geqslant 2$$

a) Usando desigualdades clássicas e a série do binônmio encontre uma "boa" cota superior e uma cota "boa" inferior para o número

$$\sqrt{1-10^{-4}}$$

b) Considere a série

$$\frac{1}{\sqrt{10000}}+\frac{1}{\sqrt{10001}}+\frac{1}{\sqrt{10002}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}+\cdots$$

i) Mostre que a série é convergente à $\beta \in \mathbb{R}$.

Considere

$$a=\frac{1}{\sqrt{10000}}+\frac{1}{\sqrt{10001}}+\frac{1}{\sqrt{10002}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}$$

ii) Usando as desigualdades (1) encontre uma " boa " cota superior *racional* para α.

iii) Usando o item a) combinado com as desigualdades (1), encontre uma "boa " cota inferior *racional* para α, determinando uma "boa " estimativa para α, determinando a parte inteira de α.

11) Dado $a > 0$, encontre uma cota superior $\leqslant 2/a^2$ para o número

$$\frac{1}{a^2}+\cdots+\frac{1}{(a\,n)^2}$$

12) Seja $n \in \mathbb{N}^*$ um número natural. Define-se $N(n)$ e $S(n)$ o número de algarismos e a soma dos algarismos de n, respectivamente (sistema decimal). Dado $x > 0$, seja $\log_{10} x$, o logaritmo de x na base 10.

a) Mostre que

$$10^{N(n)-1} \leqslant n < 10^{N(n)}$$

deduzindo as seguintes desigualdades

$$1 \leqslant S(n) \leqslant 9\,(1+\log_{10} n) < 18 \log_{10} n, \qquad n > 10$$

b) Mostre que

$$S(n+1) \leqslant S(n) + 1$$

com igualdade se $n \neq 10p - 1$, onde p é um número natural.

i) Deduza que

$$0 < \frac{S(n+1)}{S(n)} \leqslant 2$$

e que a estimativa acima é a melhor possível.

c) (Neste exercício você vai precisar de certo conhecimento da função logaritmo) Encontre o raio de convergência da série de potências

$$\sum_{k=1}^{\infty} S(k) z^k$$

Equações de diferenças de primeira e segunda ordem

Nesta parte vamos tratar brevemente equações de diferenças de primeira e segunda ordem. Para um tratamento mais completo, veja as apostilas legais sobre o assunto do curso de *equações diferenciais e diferenças* do CB-CTC, MAT1154, escritas pelo professor George Svetlichny (ref. 6) abaixo).

13) (*Equações de diferenças lineares de primeira ordem*). Considere a equação

$$y_{n+1} = a_n y_n + b_n \qquad (a_n \neq 0, \forall n) \tag{2}$$

a) Usando um raciocínio recursivo, resolva a equação (2), nos casos, $a_n \equiv 1$ e $b_n \equiv 0$, respectivamente.

b) Mostre que

$$A_n = \prod_{k=0}^{n-1} a_k$$

é solução da homogênea associada, i.e $b_n \equiv 0$. Mostre ainda que uma solução particular de (2) pode ser determinada satisfazendo $y_n = z_n A_n$, onde z_n pode ser encontrada. Deduza que a solução geral de (2) é da forma

$$y_n = c\, A_n + A_n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{A_{k+1}} \tag{3}$$

i) Quando $a_k \equiv a(\text{cst})$, mostre que a solução dada pela equação (3) é da forma

$$y_n = y_0 a^n + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b_k$$

ii) Quando $a_k \equiv a(\text{cst})$e $b_n \equiv b(\text{cst})$, mostre que a solução dada pela equação (3) é da forma

$$y_n = \begin{cases} y_0 a^n + b\left(\dfrac{a^n - 1}{a-1}\right), & \text{se } a \neq 1, \\ y_0 + bn, & \text{se } a = 1 \end{cases}$$

iii) Resolva

$$y_{n+1} = (n+1)y_n + 2^n\,(n+1)! \qquad (y_0 = 2)$$

iv) Resolva

$$y_{n+1} = \left(\frac{(n+2)^3 - 1}{(n+2)^3 + 1}\right) y_n \qquad (y_0 = 1)$$

e calcule $L = \lim_{n\to\infty} y_n$, caso o limite exista. Resposta $L = 2/3$. *Sugestão* : Note que $(n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + n + 1$.

v) Seja a um número real positivo < 1. Resolva

$$y_{n+1} = (1 + a^{2^n})y_n \qquad (y_0 = 1)$$

e calcule $L = \lim_{n\to\infty} y_n$, caso o limite exista. Resposta $L = 1/(1-a)$. *Sugestão* : Mostre a identidade

$$(1-a)(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^N}) = 1 - a^{2^{N+1}}$$

vi) Resolva

$$y_{n+1} = \cos\left(\frac{a}{2^n}\right) y_n \qquad (y_0 = 1)$$

e mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin a}{a} \tag{4}$$

Sugestão : Mostre por recorrência que

$$\frac{\sin a}{a} = \cos\left(\frac{a}{2}\right)\frac{\sin(a/2)}{a/2} = \cdots = \prod_{n=1}^{N} \cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\frac{\sin(a2^{-N})}{a2^{-N}}$$

vii) Coloque $a = \pi/2$ na equação (4) e deduza a *fórmula de Viète* (1579)

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) := \prod_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ a_n = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + a_{n-1})}, \quad n \geqslant 2$$

ou seja

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

c) (*Método dos coeficientes indeterminados*) Consideremos o caso $a_n \equiv a$, e o termo b_n na equação linear nãohomogênea seja da forma

$$b_n = kn^p b^n$$

i) Mostre que quando $b \neq a$, a equação

$$y_{n+1} = ay_n + kn^p b^n$$

possui uma solução da forma

$$y_n = q(n)b^n$$

onde $q(n)$ é um polinômio de grau p.

ii) Mostre que quando $b = a$, a equação

$$y_{n+1} = ay_n + kn^p b^n$$

possui uma solução da forma

$$y_n = q(n)b^n$$

onde $q(n)$ é um polinômio de grau $p + 1$, sem termo constante.

d) Seja

$$S_n^{(m)} := 1^m + 2^m + \ldots + n^m$$

Usando o método dos coeficientes indeterminados (terceiro método para calcular $S_n^{(m)}$), mostre que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{5}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

As duas primeiras maneiras de calcular $S_n^{(m)}$ você já aplicou na primeira lista (Lista 1); que são indução e uma fórmula para calcular $S_n^{(m)}$, que se reduz ao cálculo de $S_n^{(m-1)}$. O quarto procedimento você pode encontrar no exercício 20) da seção de seqüências e séries, logo em seguida. Finalmente, uma quinta maneira de resolver é usar o exercício 1) da Lista 1.

i) Mostre que

$$1^m + 2^m + \ldots + n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + a_m n^m + \cdots$$

deduzindo que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(m)}}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}$$

No livro do Elon Lima (veja ref. 2)) você pode encontrar uma outra maneira de fazer isto (veja exerc. 31 do cap. IV). Uma terceira maneira de fazer é via *soma de Riemann*, que está embutida no exercício 20) da seção de seqüências e séries. Claro que para calcular o limite em questão você poderá aplicar o exercício 1) da Lista 1.

ii) Calcule

$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \cdots + (n+1) \cdot 3^n$$

14) (*Equações de diferenças lineares de segunda ordem*). Considere a equação

$$y_{n+2} + a_n y_{n+1} + b_n y_n = g_n \tag{6}$$

com equação homogênea associada dada por

$$y_{n+2} + a_n y_{n+1} + b_n y_n = 0$$

a) Mostre que conhecendo-se uma solução $u_n \neq 0, \forall n$ da equação homogênea associada, uma segunda solução linearmente independente, pode ser encontrada pelo *método de variação dos parâmetros* fazendo $y_n = z_n\, u_n$, obtendo

$$z_n = c + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\prod_{j=0}^{k-1} b_j}{u_k\, u_{k+1}}$$

O mesmo procedimento é válido para se encontrar a solução geral de (6), desde que conhecida uma solução da *equação homogênea* associada à (6).

b) (*A equação com coeficientes constantes*). Considere a equação linear homogênea dada por

$$y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = 0$$

i) Procure soluções da forma r^n, $r \neq 0$, obtendo que conforme as raízes da *equação característica*

$$r^2 + ar + b = 0 \tag{7}$$

podemos exibir explicitamente a solução geral da equação da seguinte forma: Se as raízes (r_1, r_2) são reais e distintas, toda solução é da forma $c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$. Se as raízes são reais e iguais toda solução é da forma $c_1 r^n + c_2 n r^n$. Se as raízes são complexas conjugadas toda solução é da forma $c_1 r^n \cos n\theta + c_2 r^n \sin n\theta$ (aqui fizemos um abuso de notação).

b) (*Método dos coeficientes indeterminados*). Suponha que o termo não homogêneo é da forma

$$g_n = k n^p b^n, \qquad k, b \in \mathbb{R} \text{ e } n, p \in \mathbb{N}$$

Queremos resolver

$$y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = g_n \tag{8}$$

quando g_n é da forma acima

i) Mostre que se b não é raíz da equação (6) então existe uma solução de (7) da forma $y_n = q(n) b^n$, onde $q(n)$ é um polinômio de grau p.

ii) Mostre que se b é raíz *não repetida* da equação (6) então existe uma solução de (7) da forma $y_n = q(n)b^n$, onde $q(n)$ é um polinômio de grau $p+1$, sem termo constante.

iii) Mostre que se b é raíz *repetida* da equação (6) então existe uma solução de (7) da forma $y_n = q(n)b^n$, onde $q(n)$ é um polinômio de grau $p+2$, sem termo constante e sem termo linear.

Seqüência e séries de números reais

15) Mostre que a série abaixo converge para $p > 0$ e converge absolutamente para $p > 1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^p}$$

a) Mostre que a série $\sum c_n$ diverge para $0 < p \leqslant 1/2$, onde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \, a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)\,(n-k+1)\right)^{-p}$$

O que isto significa para você conceitualmente ?

16) Mostre que as séries abaixo são convergentes.

a)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$$

b)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$$

17) Mostre que as séries abaixo são divergentes

a)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^p}$$

b)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log(\log n)}}$$

18) Para que valores a a série abaixo converge (diverge) ?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n\, n!}{n^n}$$

Para um certo *valor crítico* você vai precisar da fórmula de Stirling.

19) (*Constante de Euler- Mascheroni*) Considere a seqüência

$$\gamma_n = (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) - \ln n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

a) Mostre que $\{\gamma_n\}$ é uma seqüência decrescente e que $0 < \gamma_n < 1$. Defina $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n$.
Nota: Talvez você goste de saber para fazer este exercício que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

b) Mostre $\frac{1}{2} < \gamma < \frac{\pi^2}{12}$. *Sugestão*: Mostre que

$$\gamma = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u}{k(u+k)}\, \mathrm{d}u$$

e considere as desigualdades

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(1+k)} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(u+k)} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad , \qquad (0 < u < 1)$$

20) Seja $\{a_n\}$ uma seqüência que comverge à $a \in \mathbb{R}$.

a) Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

Sugestão : Observe que basta considerar o caso $a = 0$ e quebre a soma em duas partes, levando em conta que $\sup_n |a_n|$ é finito e que $a_n \to 0$, quando $(n \to \infty)$.

b) Seja $\{p_n\}$ uma seqüência de números reais positivos, tal que $a_1 + a_2 + \cdots a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \cdots p_n} = a$$

21) Vamos considerar a soma

$$S_n^{(m)} := 1^m + 2^m + \ldots + n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + a_m n^m + \cdots$$

a) Considere também a seqüência

$$u_n = \frac{1^m}{n^{m+1}+1} + \cdots + \frac{n^m}{n^{m+1}+n}$$

Mostre que quando ($n \to \infty$) o comportamento da seqüência u_n é o mesmo da soma de Riemann da função $f(x) = x^m$, no intervalo $[0,1]$. Conclua que $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(m)}}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}$. (confira com o exercício 13) d) i) da seção de equações de diferenças, logo acima).

b) Estude o comportamento de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(m)}}{n^q}$$

para m e q inteiros positivos quaisquer.

22) Seja $\alpha > 0$. Considere

$$a_n := \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha + n + p}$$

Mostre que $\lim_{n\to\infty} a_n = \log 2$. *Sugestão* : Identifique uma certa soma de Riemann.

23) Considere a com $1 < a < 2$.

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2-a}{\sqrt{\left((2-a)k + an\right)^2 - n^2}}$$

Mostre que $\lim_{a\to 1} \lim_{n\to\infty} y_n = \ln(2+\sqrt{3})$. *Sugestão* : Identifique uma certa soma de Riemann.

24) Vamos considerar as seguintes equações de diferenças *não linear*:

a)

$$x_{n+1} = \frac{4 - x_n}{3 - x_n}$$
$$x_1 = 1$$

Mostre que $x_n = \dfrac{2n-1}{n}, \quad n > 1.$

b)

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$$
$$x_1 = 1$$

Mostre que $\dfrac{1}{2} \leqslant x_n \leqslant \dfrac{2}{3}$. Em seguida mostre que $x_n \to \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ (número áureo) .

25) (*Lema da soma parcial de Abel*): Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}$ duas seqüências de números complexos, $n \in \mathbb{N}$ Coloquemos $A_n = a_0 + \cdots + a_n, n \geqslant 0$; então para $n \geqslant 0, k \geqslant 1$, temos que

$$\sum_{j=n+1}^{n+k} a_j b_j = \sum_{j=n+1}^{n+k-1} A_j(b_j - b_{j+1}) - A_n b_{n+1} + A_{n+k} b_{n+k}$$

Deduza: $\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$ converge se $\sum_{n\geqslant 0} A_n(b_n - b_{n+1})$ converge e $\lim_{n\to\infty} A_n b_n$ existe.

a) (*Critério de Abel*) Da fórmula de Abel deduza que se $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ é convergente e se $\{b_n\}$ é uma seqüência monótona limitada; então $\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$ converge.

b) (*Critério de Dirichlet*) Mostre que se a seqüência das somas parciais $\{A_n\}$ de $\sum_n a_n$é limitada e se a seqüência $\{b_n\}$ é uma seqüência real monótona tendendo a zero, então $\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$ converge.

Daí deduza o critério de Leibniz: Seja $\{\alpha_n\}$ uma seqüência monótona de números reais tendendo a zero, então $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \alpha_n$ converge. Dê exemplos de séries convergentes, mas não absolutamente convergentes.

Também deduza o seguinte:*Se* $\sum_n |b_n - b_{n+1}| < \infty$ *e se* $\sum_n a_n$ *converge então* $\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$ *converge.*

26) Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ seqüências de números reais estritamente positivos com

$\sum_n c_n < \infty, \sum_n d_n = \infty.$

a) Mostre que se para algum $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{c_{n+1}}{c_n}, \qquad n \geqslant N,$$

então $\sum\limits_n a_n < \infty.$

b) Mostre que se para algum $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{d_{n+1}}{d_n}, \qquad n \geqslant N,$$

então $\sum\limits_n a_n = \infty$.

Sugestão: Para o item a) observe que a seqüência $\{a_n/c_n\}$ é uma seqüência decrescente.

27) (*Critério de Kummer*): Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ seqüências de números reais estritamente positivos com $\sum_n d_n = \infty$.

a) Mostre que se para algum $N \in \mathbb{N}$ e um número $\rho > 0$ temos que

$$b_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} b_{n+1} \geqslant \rho > 0, \qquad n \geqslant N,$$

então $\sum\limits_n a_n < \infty$.

b) Mostre que se para algum $N \in \mathbb{N}$ temos que

$$\frac{1}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{d_{n+1}} \leqslant 0, \qquad n \geqslant N,$$

então $\sum\limits_n a_n = \infty$.

Sugestão: Para o item b) veja o exercício anterior item b). Para o item a) observe que $w_n := a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} \geqslant a_n \rho > 0, n \geqslant N$. Também observe que $\sum_n w_n$ é convergente.

28) (*Critério de Raabe-Duhamel*). Guardando as notaçõesdo exercício 5), tomando $b_n = n - 1 (n \geqslant 2)$ no exercício 5 a) e $d_n = 1/(n-1)$ no item b) obtém-se

$$\sum_n a_n < \infty \quad \text{se, para algum } \alpha > 1 \quad \text{e um } N \in \mathbb{N},\ n\Big(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\Big) \geqslant \alpha,\ n \in N$$

$$\sum_n a_n = \infty \quad \text{se, para algum } N \in \mathbb{N},\ n\Big(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\Big) < 1,\ n \in N$$

Em particular, se $\lim\limits_{n \to \infty} n\Big(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\Big) = L$ então $\sum_n a_n < \infty$ se $L > 1$ e $\sum_n a_n = \infty$ se $L < 1$. Mostre que se $L = 1$, todas as hipóteses podem ocorrer.

29) (*Critério de Gauss*) Seja $\{a_n\}$ uma seqüência de números reais estritamente positivos tais que, para algum $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta_n}{n^p}, \qquad n \geqslant N$$

onde $p > 1, \alpha \in \mathbb{R}$ e $\sup_{n \geqslant N} |\beta_n| < \infty$.

a) Mostre que $\sum_n a_n < \infty$, se $\alpha > 1$ e $\sum_n a_n = \infty$, se $\alpha \leqslant 1$.

Sugestão: Se $\alpha \neq 1$ utilize o exercício 27). Para $\alpha = 1$ utilize o exercício 26 b) com $1/d_n = (n-1)\log(n-1),\ n \geqslant 3$ verificando que

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{d_{n+1}} \Big) = -1.$$

b) Seja $a \in \mathbb{R}$. Seja $z_n = \binom{a}{n}$, onde $\binom{a}{0} = 1,\ \binom{a}{1} = a$,

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}, \qquad n \geqslant 1.$$

Mostre que $\sum_n |z_n| < \infty$ se $a > 0$ e, $\sum_n |z_n| = \infty$ se $a < 0,\ a \neq 0$.

Sugestão: Considere

$$r_n = \Big| \frac{z_{n+1}}{z_n} \Big| = \Big| \frac{a-n}{n+1} \Big|$$

Quando $a \neq 0$ aplique o exercício 27), verificando que

$$n(1 - r_n) = \frac{n}{1 + r_n} \cdot \frac{1 - |a|^2 + 2n(1+a)}{(n+1)^2} \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} n(1-r_n) = 1 + a$$

30) Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz mostre que se $\sum_n |a_n| < \infty$ as seguintes séries são convergentes

$$\sum_n |a_n a_{n+1}|^{1/2}, \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{|a_n|^{1/2}}{n}, \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{|a_n|^{1/2}}{n^{1/2+p}}, \qquad p > 0.$$

Voce poderia dar uma demonstração mais elementar ?

31) Mostre que

$$A_n = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \cos \nu x = \frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}$$

$$B_n = \sum_{\nu=1}^{n} \sin \nu x = \frac{\cos(x/2) - \cos(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}$$

se $n \in \mathbb{N}$ e $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ utilizando as fórmulas

$$2\sin(1/2)x\cos\nu x = \sin\big(\nu + \frac{1}{2}\big)x - \sin\big(\nu - \frac{1}{2}\big)x$$

$$2\sin(1/2)x\sin\nu x = \cos\big(\nu - \frac{1}{2}\big)x - \cos\big(\nu + \frac{1}{2}\big)x.$$

Conclua que se $x \notin 2\pi\mathbb{Z},\ n \geqslant 1$ as séries

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \cos\nu x, \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin\nu x$$

são convergentes, desde que as seqüência $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ seja monótona tendendo a zero. Dê exemplos particulares disto.

Séries de potências

32) Determine o raio de convergência das séries.

a) $\sum_n n^\alpha z^n,\ \alpha \in \mathbb{R}.$

b) $\sum_n n!(z/n)^n.$

c) $\sum_n \alpha^{n^2} z^n,\ \alpha > 0.$

d) $\sum_n \frac{1}{n!}\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)z^n; \qquad \sum_n \frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)z^n,\ .$

Sugestão: Considere o caso $\alpha \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \}$ *separadamente.*

e) $\sum_n (\log n)^2 z^n$. *Resposta*: 1

f) $\sum_n n!/(n^n)z^n.$

Sugestão: Considere a fórmula de Stirling $n! = n^n \mathrm{e}^{-n} u_n$ com $\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} = 1$.
Resposta: e

g) $\sum_n \frac{(2n!)}{n!n^n}$. Resposta $: \frac{\mathrm{e}}{4} \cdot$ Para fazer este exercício, veja a dica acima, ou siga as dicas de Elon Lima na ref. 2), exerc. 33 do cap. IV.

33)

a) Sejam a, b, c números determinados. Suponha que c não é um inteiro $\leqslant 0$. Mostre que o raio de convergência da série abaixo é 1:

$$1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)\cdot b(b+1)}{2!c(c+1)}z^2 + \cdots$$
$$+ \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)\cdot b(b+1)\dots(b+n-1)}{n!c(c+1)\dots(c+n-1)}z^n + \cdots$$

34) Encontre os termos de ordem $\leqslant 3$ do desenvolvimento em série de potências da função $f(z) = z^2/(z-2)$ em $z = 1$.
Resposta : $-1-(1+2)(z-1)-(1+2+1)(z-1)^2-(1+2+1)(z-1)^3$.

35) Considere

$$J(z) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

a) Qual é o raio de convergência da série ?

b) Mostre que $J(z)$ satisfaz a equação diferencial (Veja o livro de William. E. Boyce e Richard C. Di Prima ("equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno") para o desenvolvimento e outros exemplos de equações regulares e singulares-regulares, de segunda ordem)

$$z^2J''(z) + zJ'(z) + z^2J(z) = 0$$

36) Seja R o raio de convergência da série $\sum_n a_n z^n (n \in \mathbb{N})$; se $s_n = a_0 + \cdots + a_n,\ n \in \mathbb{N}$, mostre que o raio de convergência R' da série $\sum_n s_n z^n$ verifica a desigualdade $R' \geqslant \min(R, 1)$ e estaleleça que

$$\sum_n s_n z^n = \frac{1}{1-z}\sum_n a_n z^n, \qquad |z| < \min(R, 1)$$

.

37) Mostre que as séries , convergem nos conjuntos $\mathcal{C}$ dados

a) $\sum\limits_n (z/(1+z))^n$. $\mathcal{C} = \{z; z > -1/2\}$.

b) $\sum\limits_n z^n/(1+z^n)$. $\mathcal{C} = \{z; |z| < 1\}$.

38) Seja $\sum a_n z^n$, uma série de potências de raio de convergência R.

a) Mostre que se $\sup_n |a_n| < \infty$, então $R \geqslant 1$.

b) Mostre que se $\sup_n |a_n| < \infty$, mas $a_n \not\to 0$, então $R = 1$.

39) Seja $\sum a_n z^n$, uma série de potências de raio de convergência R. Seja $\{b_n\}$ uma seqüência tal que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = L, \qquad 0 < L < \infty$$

Determine o raio de convergência de $\sum b_n$.

a) Usando o exercício anterior mostre que, se

$$a_n = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 n + \cdots + \alpha_k n^k}{\beta_0 + \beta_1 n + \cdots + \beta_l n^l}, \qquad \beta_l \neq 0, \alpha_k \neq 0, k, l \in \mathbb{N}$$

então o raio de convergência de $\sum a_n z^n$ é igual a 1.

40) Seja R o raio de convergência da série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. Mostre que o raio de convergência $\widetilde{R}$ da série

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{1+|a_n|} z^n$$

é dado por $\widetilde{R} = \max(R, 1)$

41) Determine os raios de convergência das séries

a) $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n 2^n z^{2n+2}$.
b) $\sum_{n\geqslant 0} 2^{\log n} z^n$.
c) $\sum_{n\geqslant 0} (\sin n) z^n$.
c) $\sum_{n\geqslant 0} (\cos n) z^n$.

Nota. Utilizando o *teorema da convergência dominada para séries somáveis* pode-se demonstrar o seguinte fato:

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} (1 + z_n)^n = \exp(z),$$

se $z_n,\ n = 1, 2, \ldots$, e $\lim_{n\to\infty} n z_n = z$. Em particular conclui-se que

$$(**) \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$$

Com efeito: Escreve-se

$$(1 + z_n)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(n), \qquad a_k(n) = \binom{n}{k} z_n^k, \qquad \text{s } 0 \leqslant k \leqslant n,$$

verificar que para k fixado, $a_k(n) \longrightarrow z^k/k!$ $(n \to \infty)$ e que $|a_k(n)| \leqslant \rho^k/k!$, $\rho = \sup_n |nz_n|$.

As séries de Taylor de $\dfrac{z}{e^z - 1}$, $\cot z$ e $\tan z$.

42) A série de Taylor de $\dfrac{z}{e^z - 1}$ em torno da origem está definida por

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_0^\infty \frac{B_k}{k!} z^k, \quad B_k$$

Mostre as seguintes afirmações

i) $B_1 = 0$ e $B_{2k+1} = 0$ para $k \geqslant 1$.

ii)

$$\binom{n}{0} B_0 + \binom{n}{1} B_1 + \binom{n}{2} B_2 + \cdots + \binom{n}{n-1} B_{n-1} = 0$$

Os números acima são chamados de *números de Bernouille.* Determine-os recursivamente, calculando

$$B_0 = 1,\ B_2 = 1/6,\ B_4 = -1/30,\ B_6 = 1/42$$
$$B_8 = -1/30,\ B_{10} = 5/66,\ B_{14} = 7/6$$

Curiosidade: $B_{26} = 8553103/6\ldots$

Sugestão: Considere $1 = \dfrac{e^z - 1}{z} \cdot \dfrac{z}{e^z - 1}$.

a) Mostre que

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_1^\infty (-1)^k \frac{4^k}{(2k)!} B_{2k} z^{2k-1}$$
$$\tan z = \sum_1^\infty (-1)^{k-1} \frac{4^k(4^k - 1)}{(2k)!} B_{2k} z^{2k-1}$$

b) Discuta o raio de convergência da série de $z \cot z$.

43) Considere a *série binomial*

$$b_\sigma(z) := \sum_0^\infty \binom{\sigma}{n} z^n$$

onde

$$\binom{\sigma}{0} := 1 \qquad \binom{\sigma}{n} := \frac{\sigma(\sigma-1)\cdots(\sigma-n+1)}{n!}$$

ou seja

$$b_\sigma(z) = 1 + \sigma z + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2} + \cdots$$

a) Deduza que b_σ é analítica na "bola" unitária aberta centrada na origem, mostrando que o raio de convergência da série que define b_σ é igual a 1. Mostre que $b_{-1} = \dfrac{1}{1+z}$, $|z| < 1$.

b) Mostre a fórmula de multiplicação :

$$(1+z)b_{\sigma-1} = b_\sigma$$

Infira que

$$b'_\sigma(z) = \sigma b_\sigma/(1+z)$$

c) Seja $\lambda(z) := \displaystyle\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}$. Mostre que

$$b_\sigma(z) = \mathrm{e}^{\sigma\lambda(z)}, \qquad |z| < 1$$

d) Deduza a fórmula de Abel-Newton

$$(1+z)^\sigma = \sum_0^\infty \binom{\sigma}{n} z^n, \qquad , \quad |z| < 1.$$

44) Neste exercício você deverá assumir o teorema que diz que uma série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$ de raio de convergência $R > 0$, converge absolutamente e uniformemente num compacto contido no seu domínio de convergência a uma função $f(z)$. Tal função $f(z)$ é infinitamente diferenciável (na verdade *analítica*) no seu domínio de convergência e suas derivadas são obtidas derivando-se termo a termo a série original, i.e $f'(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^\infty na_n(z-z_0)^{n-1}$, e assim por diante.

a) Sejam $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ e $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$, duas séries de potências de raio $R_1 > 0, R_2 > 0$, respectivamente. Mostre que $h(z) = f(z)g(z)$, é dada por uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, onde

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots - a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

de raio de convergência R, satisfazendo $R \leqslant \min(R_1, R_2)$.

i) Usando obrigatoriamente séries de potências, mostre que

$$\mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^w = \mathrm{e}^{z+w}, \qquad \forall z, w$$

b) Discuta o raio de convergência da série de Taylor de $\dfrac{z}{\mathrm{e}^z - 1}$ em torno da origem, dada no exercício 42) acima.

c) Discuta amplamente diferenciabilidade *versus* analiticidade.

BIBLIOGRAFIA SUCINTA

1) Augus E. Taylor. *Introduction to Functional Analysis*. John Wiley and Sons, Inc, 1958.

2) Elon Lages Lima. *Curso de Análise Volume 1*. Projeto Euclides, 1995.

3) Elon Lages Lima. *Elementos de Topologia Geral*. Projeto Euclides, 1970.

4) Henri Mascart e Marius Stoka. *Fonctions d'une Variable Réele*. PUF, 1986.

5) G. H. Hardy, J. E. Littlewood e G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge Press , 1973.

6) George Svetlichny. *Apostila de equações diferenciais e diferenças*. Dep. Mat. PUC-Rio, 2002.2

7) J. Rivaud. *Séries; équations différentielles*. Vuibert, 1973.

8) M. Spivak, *Calculus*. Dois volumes. Ed. Reverté, Barcelona, 1970.

9) Ralph P. Boas, Jr. *A Primer of Real Functions*. Math. Assoc. of Amer. John Wiley and Sons, Inc. 1960.

10) Reinhold Remmert. *Theory of complex functions.* Springer, 1991 (*Readinds in Mathematics*). *Classical topics in complex function theory*, Springer, 1998.

11) Walter Rudin. *Princípios de Análise Matemática.* Livro Técnico, N, 1971.

12) Srishti D. Chatterji. *Cours d'Analyse 1,2.* Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1997.