LISTA 3 DE ANÁLISE REAL 2009

RICARDO SA EARP

Limites e continuidade de funções reais

(1) Dado um número real r, considere a função real $f(x)$ definida por

$$\begin{cases} f(x) = x\left|1+\dfrac{1}{x}\right|^r & \text{se } x \neq 0, -1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

(a) Mostre que $f(x)$ é contínua no conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

(b) Mostre que $f(x)$ é diferenciável neste conjunto e que sua derivada verifica

$$f'(x) = f(x) \cdot \frac{x+1-r}{x(x+1)} \tag{1}$$

para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

(c) Mostre que para $r < 1$, $f(x)$ é contínua em $x = 0$ e que para $r \geqslant 1$, $f(x)$ é descontínua em $x = 0$.

(d) Mostre que se $r < 0$ então $f'(0) = 0$, se $r = 0$ então $f'(0) = 1$. O que acontece para $0 < r < 1$?

(e) Usando a fómula (1) acima, mostre que $f'(x)$ é contínua em $x = 0$, para $r \leqslant 0$.

(f) Mostre que para $r > 0$, $f(x)$ é contínua em $x = -1$.

 (i) Mostre que se $r > 1$, então $f'(-1) = 0$ e $f'(x)$ é contínua em $x = -1$.

 (ii) Mostre que se $r = 1$, então $f(x)$ possua uma derivada lateral à direita e uma derivada lateral à esquerda em $x = -1$. Calcule-as.

(2) Deduza o *teorema do valor intermediário*: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Seja d tal que $f(a) < d < f(b)$. Segue que existe $c \in (a, b)$, tal que $f(c) = d$.

(3) Considere a função polinomial

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1, \qquad n > 0$$

(a) Mostre que $f_n(x)$ possui um único zero positivo a_n. Estime a_2.
(b) Mostre que a seqüência $\{a_n\}$ é monótona decrescente e deduza que $a_n \downarrow \frac{1}{2}$ (quando $n \to \infty$)

(4) Considere o conjunto X das funções definidas em toda reta real $\mathbb{R}$ que verificam a condição funcional

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{2}$$

(a) Mostre que X é um espaço vetorial.
(b) Mostre que X contém um subespaço vetorial X_1 de dimensão 2, interpretando a condição (2) geometricamente.
(c) Mostre que o subespaçco das funções contínuas contidas em X é exatamente X_1.

(5) Considere f uma função real definida no intervalo fechado $[0,1]$ satisfazendo a condição

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K\sqrt{|x-y|}, \qquad \forall x, y \in [0,1] \tag{4}$$

onde K é uma constante positiva qualquer.
(a) Mostre que f é uniformemente contínua em $[0,1]$.
(b) Mostre que o conjunto X das funções que satisfazem (4) forma um espaço vetorial.
(c) Exiba uma família de funções contínuas em $[0,1]$ que não verifique a condição (4). Estude a diferenciabilidade desta família em $[0,1]$.
(d) Será que uma função contínua em $[0,1]$, diferenciável em $(0,1)$ com derivada limitada verifica a condição (4) ?
(e) Dê um exemplo de uma função satisfazendo (4) que seja diferenciável em $(0,1)$, mas cuja derivada não seja limitada.

(6) Considere função $f(x) = \sqrt[5]{x+\sqrt{x^2-1}} + \sqrt[5]{x-\sqrt{x^2-1}}$. Determine o conjunto $f^{-1}(2)$.

(7) Considere a função $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ para $x \in [0,1]$. Sem usar o cálculo diferencial mostre que f é decrescente. Determine o máximo global e o mínimo global de f.

(8) Considere a função $f(x) = \dfrac{x^r - 1 - r(x-1)}{(x-1)^2}$, onde $r \in \mathbb{Z}^+$. Usando obrigatorialmente o conhecimento da série binomial, mostre que
(a) $f(x) \to \dfrac{r(r-1)}{2}$, quando $x \to 1$.
(b) Deduza que o limite de $f_n(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \cdots + \sqrt{x+n} - n\sqrt{x}$, quando $x \to \infty$ é zero.