

LISTA 3 DE ANÁLISE REAL 2010

RICARDO SA EARP

Espaços métricos

- (1) Seja X um espaço métrico e sejam A, B , subconjuntos de X . Responda verdadeiro ou falso. Caso verdadeiro, deduza, caso falso dê um contraexemplo.
 - (a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
 - (b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
- (2) Seja (X, d) um espaço métrico. Deduza que dado $x_0 \in X$, a função distância $d(x_0, x) := \text{dist}(x_0, x)$ é uma função contínua de $x \in X$. Deduza que $d(x, y)$ é uma função contínua de ambos x e y .
- (3) Deduza que num espaço métrico X um conjunto F é fechado se e só se para toda sequência x_n convergente de pontos de F , convergindo a $x \in X$, então $x \in F$.
- (4) Seja (X, d) um espaço métrico munido da distância d . Seja $X_0 \subset X$ um subconjunto de X , considerado como um espaço métrico em si mesmo, i.e $X_0 = (X_0, d)$. Deduza que se X é completo e se X_0 é fechado em X , então (X_0, d) também é completo.
- (5) Deduza que um conjunto compacto K de um espaço métrico (X, d) é fechado e limitado.
Deduza também que K é completo.
- (6) Seja X um espaço métrico e seja $S \subset X$ conjunto. Dizemos que um ponto $x \in X$ é um *ponto de acumulação* do conjunto S , se cada vizinhança de x (i.e aberto que contém x), contém um ponto de S diferente de x .
Deduza que x é um ponto de acumulação de S , se e só se existe uma sequência convergente $\{x_n\}$ de pontos distintos de S que tem x como limite.
- (7) Seja X um espaço métrico completo. Dizemos que um conjunto $S \subset X$ tem diâmetro finito se $\text{dist}(x, y)$ é limitada para todo $x, y \in S$.
Suponha que $\{S_n\}$ é uma sequência de conjuntos fechados não vazios tal que $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \cdots$. Suponha que o diâmetro

$\text{diam}(S_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Deduza que a interseção $\cap S_n$ de todos os conjuntos S não é vazia.

- (8) Sejam S_1 e S_2 dois subconjuntos de um espaço métrico (X, d) .
- Defina $d(S_1, S_2)$.
 - Se S_1 e S_2 são fechados disjuntos tal que $\forall p \in S_2, \text{dist}(p, S_1) > 0$, será que $\text{dist}(S_1, S_2) > 0$?
 - Estude $d(S_1, S_2)$ quando S_1 e S_2 são compactos de X com interseção vazia, i.e $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.
 - Será que quando $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ segue que $d(S_1, S_2) > 0$?
- (9) Sejam A e B dois subconjuntos de \mathbb{R} . Mostre que para o subconjunto $A \times B$ de \mathbb{R}^2 (produto cartesiano), valem as seguintes propriedades:

$$(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ, \quad \overline{(A \times B)} = \overline{A} \times \overline{B}$$

$$\partial(A \times B) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B)$$

- (10) Generalize o item anterior quando o ambiente é um espaço métrico (X, d) .