

LISTA 3 DE ANÁLISE REAL 2011

RICARDO SA EARP

Sequências e séries

- (1) Seja $n \in \mathbb{N}$. Considere a função $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = nx(1 - x^2)^n$.
- (a) Para $0 < a < 1$, calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$.
- (b) Seja $n \in \mathbb{N}$.
Seja a_n o ponto de máximo global de $f_n(x)$ (você pode calculá-lo usando os recursos do Cálculo I): Deduza que dado $0 < a < 1$ existe N tal que para $n \geq N$ então $a_n < a$.
Explícite N em função de a .
- (c) Discuta a existência ou inexistência dos limites $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(a_n)}{na_n}$, e $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a_n)$, calculando-os, caso os limites existirem (finito ou infinito).
- (d) Seja $0 < a < 1$. Deduza que existe $\alpha_n(a) > 0$ satisfazendo $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(a) = 0$, tal que:
 $f_n(x) \leq \alpha_n(a)$, $a \leq x \leq 1$.
- (2) Seja $f_n^\pm(x) = \frac{x^n}{1 \pm x^n}$, $|x| < 1$.
- (a) Para $-1 < x_0 < 1$, calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^\pm(x_0)$.
- (b) Seja $0 < a < 1$. Deduza que existe $\alpha_n(a) > 0$ satisfazendo $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(a) = 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(a) < \infty$, tal que:
 $|f_n^\pm(x)| \leq \alpha_n(a)$, $|x| \leq a$.
- Deduza que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ é normalmente convergente em $[-a, a]$.
- (3) Considere $f_n(x) = \frac{n^2 e^{-x} + x^2}{n^2 + x}$, $x \in [0, 1]$.
- (a) Para cada $x \in [0, 1]$ fixado, deduza que:
 $f_n(x) \rightarrow e^{-x}$ ($n \rightarrow \infty$).

(b) Deduza que $|x^2 - xe^{-x}| < 1$, $x \in [0, 1]$.

(c) Seja $f(x) := e^{-x}$, $x \in [0, 1]$. Deduza que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f(x)|, \quad x \in [0, 1] \text{ é normalmente convergente.}$$

(4) Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números reais. Defimos:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

Seja $\mathcal{A} = \{\text{valores aderentes ou pontos limites da sequência } x_n\} \subset$

$$\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

(a) Deduza que $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup \mathcal{A}$.

(b) Deduza que $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf \mathcal{A}$.

(c) Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ duas sequências de números reais. Sejam $a := \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$, $b := \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$, $c := \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n$, e $d := \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n$. Deduza que

(d)

$$b + c \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq b + d$$

$$a + c \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq a + d$$

sempre que $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$ não são da forma $+\infty - \infty$ ou $-\infty + \infty$.

Além disso deduza que

(e)

$$bc \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \leq bd$$

$$ac \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \leq ad$$

sempre que ac , ad , bc , bd não são da forma $0 \cdot \infty$ ou $\infty \cdot 0$.

(5) Deduza de duas maneiras distintas que se $\sum_n |a_n| < \infty$ as seguintes séries são convergentes

$$\sum_n |a_n a_{n+1}|^{1/2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|^{1/2}}{n}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|^{1/2}}{n^{1/2+p}}, \quad p > 0.$$

(6) Deduza que se $\sum a_n := A$, $\sum b_n := B$ são duas séries que convergem absolutamente então o produto das séries converge

absolutamente e temos que

$$\left(\sum_n a_n \right) \left(\sum_n b_n \right) = \sum_n c_n$$

onde $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$.

Sugestão: Defina $A_n := \sum_{k=0}^n a_k$, $B_n := \sum_{k=0}^n b_k$, $C_n := \sum_{k=0}^n c_k$ e

$\beta_n := B_n - B$. Escreva:

$C_n = A_n B + a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \dots + a_n \beta_0$. Estime a quantidade $\gamma_n := a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \dots + a_n \beta_0$, deduzindo que $\limsup |\gamma_n|$ é igual a zero, levando em conta que $\beta_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) e que $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

- (7) Seja $\{x_n\}$ uma sequência e seja $\{\alpha_n\}$ uma sequência de números reais positivos. Suponha que o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_n|}{\alpha_n}$$

exista e seja igual a $0 \leq L \leq \infty$. Deduza que

- (a) Se $L < \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$ então a série $\sum x_n$ converge absolutamente.
- (b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ e $L > 0$ então $\sum |x_n| = \infty$.
- (c) Discuta a convergência absoluta das séries cujo termo geral é dado por $x_n = nx/(1+n^3)$ e $x_n = (x+nx^2)/(1+n+n^2)$, $n \in \mathbb{N}$, respectivamente.
- (8) Neste exercício, vamos deduzir que ℓ^p , $p \geq 1$ é um espaço de Banach.

Sugestão: Considere $x_n = (c_1^{(n)}, c_2^{(n)}, \dots, c_k^{(n)}, \dots)$ uma sequência de Cauchy em ℓ^p .

- (a) Deduza que para k fixado, existe $\lim_{n \rightarrow \infty} c_k^{(n)} := c_k$.
- (b) Deduza que a sequência $\{c_k\}$ está em ℓ^p , usando um argumento parecido com o que foi feito para mostrar que ℓ^p é um espaço vetorial normado.
- (c) Fazendo $x = \{c_k\}$, deduza que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$, concluindo que ℓ^p é completo.