ANÁLISE REAL-2002.2–Lista 4

Professor: Ricardo Sá Earp

Limites e continuidade em espaços métricos
Limites de funções reais
Desigualdades envolvendo funções clássicas

Limites e continuidade em espaços métricos

1) Seja $f(x) = v \cdot x$, onde $\cdot$ denota o produto escalar em $\mathbb{R}^n$, e $v \in \mathbb{R}^n$ é um vetor fixado. Discuta a continuidade de $f(x)$ e discuta a continuidade de uma definição análoga em *espaços de Hilbert*. Mostre que os semi-planos dados pelas equações

$$\{x; v \cdot x > \alpha\} \qquad \text{e} \quad \{x; v \cdot x \geqslant \alpha\}$$

são subconjuntos abertos e fechados, respectivamente. Deduzir que o hiperplano $\{x; v \cdot x = \alpha\}$, é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$. Tais resultados se estendem (da maneira natural) à espaços de Hilbert ?

2) Dê uma caracterização de continuidade de uma função f que leva um espaço métrico X num espaço métrico Y em termos de seqüências.

3) Mostre que se f, g são funções contínuas que levam um espaço métrico X em $\mathbb{R}^n$, então se $f(a) \neq g(a)$, para certo $a \in X$, segue-se que $f(x) \neq g(x)$, numa vizinhança de a.

4) Dizemos que uma aplicação f que leva um espaço métrico X num espaço métrico Y é *aberta* (resp. *fechada*), se a imagem por f de uma aberto de X (resp. fechado) é um aberto de Y (resp. fechado).
   a) Dê exemplos de aplicações contínuas reais definidas em subconjuntos do espaço Euclideano que sejam abertas, mas não sejam fechadas.
   b) Dê exemplos de aplicações contínuas definidas de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ que não sejam abertas nem fechadas.
   c) Dê exemplos de aplicações contínuas f definidas num intervalo I da reta em $\mathbb{R}^2$ que sejam injetivas mas não produzem um homeomorfismo entre I e sua imagem $f(I)$.

d) Sejam X_1 e Y_1 subconjuntos de X e Y, respectivamente. Seja $f : X_1 \to X_2$ uma função contínua bijetiva tal que para todo aberto A de X (com a topologia induzida), $f(A)$ é um aberto de Y_1 (com a topologia induzida). Mostre que f é um homeomorfismo.

5) Dê exemplos de funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sejam uniformemente contínuas. Estabeleça alguma condições suficientes para que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja uniformemente contínua.

6) Dê exemplos de funções definidas numa vizinhança da origem de $\mathbb{R}^2$ que admitem um mesmo limite quando $(x, y) \to (0, 0)$, ao longo de raios que chegam a origem $(0, 0)$ de $\mathbb{R}^2$, mas que não sejam contínuas na origem.

7) Seja X um espaço de Hillbert com produto interno $<,>$. Mostre que $X \times X \to \mathbb{R}$, tal que $(x, y) \mapsto < x, y >$, é uma função contínua.

8) Seja $T : X \to Y$ uma transformação linear sobretiva de um espaço vetorial normado X sobre um espaço vetorial normado Y. Mostre que a inversa T^{-1} existe e é contínua se e somente se existe $\lambda > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_Y \geqslant \lambda \|x\|_X$$

Discuta o caso em que X e Y tenham dimensão finita.

9) Mostre com todos os detalhes que uma função real contínua definida num espaço métrico compacto X assume o máximo e o mínimo.

10) Mostre com todos os detalhes que uma aplicação contínua de um espaço métrico compacto X num espaço métrico Y é uniformemente contínua.

11) Mostre com todos os detalhes que se f é uma função real monótona definida num intervalo (a, b) então o conjunto das descontinuidades de f é no máximo enumerável.

12) O que você pode dizer de uma função real uniformemente contínua definida num conjunto limitado de $\mathbb{R}$?

13) Dê exemplos de funções diferenciáveis reais tal que a derivada não é contínua. Tais funções podem ser analíticas ?

14) Considere $\{A_i\}_{i \in J}$, uma família de conjuntos conexos de um espaço métrico X. Suponha que existe um ponto comun a todos os $A_i's$; i.e $\cap_i A_i \neq 0$. Mostre que a união $A = \cup_{i \in J} A_i$ é um conjunto conexo.

   a) Como corolário, mostre que se quaisquer dois pontos p e q de um espaço métrico X estejam contidos em algum conexo $X_{ab} \subset X$, então X é conexo.

15) Seja A um subconjunto conexo de um espaço métrico X. Mostre que se $B \subset X$ satisfaz $A \subset B \subset \overline{A}$, então B é conexo.

16) Dizemos que um espaço métrico X é *conexo por caminhos*, se dois pontos quaisquer p, q de X, podem ser ligados por um caminho inteiramente contido em X, i.e existe uma aplicação contínua $\alpha : [0,1] \to X$, tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$. Mostre que um espaço métrico conexo por caminhos é necessariamente conexo.

    Nota: Dizemos que um espaço métrico X é *localmente conexo por caminhos*, se para cada $x \in X$, e cada vizinhança V de x em X, existe uma vizinhança conexa por caminhos U de x em X, tal que $x \in U \subset V$. Verifique que todo espaço vetorial normado X é localmente conexo por caminhos. O fato é que se X é um espaço localmente conexo por caminhos, então X é conexo $\Longleftrightarrow$ X é conexo por caminhos.

17) (*Teorema da Alfândega*). Sejam C e A subconjuntos de um espaço métrico X. Assuma que C é conexo e que possui pontos em comum com A e com $A^c = X \setminus A$. Mostre que C tem interseção não vazia com ∂A.

18) (*Componentes conexas*). Seja A um subconjunto de um espaço métrico X. Seja $a \in A$. Define-se $\mathcal{C}(a)$ como sendo a união de todos os subconjuntos conexos de A que contém o ponto a. Note que $\{a\}$ é um conjunto conexo que contém a. Diz-se que $\mathcal{C}(a)$ é a *componente conexa* de a em A; é o " maior conjunto" conexo contendo a e que é contido em A.

    a) Mostre que
    $$\begin{cases} \text{se} \quad b \in \mathcal{C}(a) \quad \text{então } \mathcal{C}(a) = \mathcal{C}(b) \\ \text{se} \quad b \notin \mathcal{C}(a) \quad \text{então } \mathcal{C}(a) \cap \mathcal{C}(b) = \emptyset \end{cases}$$

        i) Mostre que todo conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ é a união de uma família de conjuntos abertos e conexos (chamados *domínios*), dois a dois disjuntos.

    b) Mostre que os intervalos (a, b) e $(c, d]$ não são homeomorfos.

    c) Mostre que as letras Y e I (as extremidades não contam) não são homeomorfas.

Limites e continuidade de funções reais

No próximo exercício você está pressuposto saber a definição de uma função diferenciável real.

19) Dado um número real r, considere a função real $f(x)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x\left|1+\dfrac{1}{x}\right|^r & \text{se } x \neq 0, -1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

a) Mostre que $f(x)$ é contínua no conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$. Mostre que $f(x)$ é diferenciável neste conjunto e que sua derivada verifica

$$f'(x) = f(x) \cdot \frac{x+1-r}{x(x+1)} \tag{1}$$

para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

b) Mostre que para $r < 1$, $f(x)$ é contínua em $x = 0$ e que para $r \geqslant 1$, $f(x)$ é descontínua em $x = 0$.

c) Mostre que se $r < 0$ então $f'(0) = 0$, se $r = 0$ então $f'(0) = 1$. O que acontece para $0 < r < 1$?

d) Usando a fómula (1) acima, mostre que $f'(x)$ é contínua em $x = 0$, para $r \leqslant 0$.

e) Mostre que para $r > 0$, $f(x)$ é contínua em $x = -1$.

i) Mostre que se $r > 1$, então $f'(-1) = 0$ e $f'(x)$ é contínua em $x = -1$.

ii) Mostre que se $r = 1$, então $f(x)$ possua uma derivada lateral à direita e uma derivada lateral à esquerda em $x = -1$. Calcule-as.

20) Considere a função polinomial

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1, \qquad n > 0$$

a) Mostre que $f_n(x)$ possui um único zero positivo a_n. Estime a_2.

b) Mostre que a seqüência $\{a_n\}$ é monótona decrescente e deduza que $a_n \downarrow \frac{1}{2}$ (quando $n \to \infty$)

21) Considere o conjunto X das funções definidas em toda reta real $\mathbb{R}$ que verificam a condição funcional

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{2}$$

a) Mostre que X é um espaço vetorial.
b) Mostre que X contém um subespaço vetorial X_1 de dimensão 2, interpretando a condição (2) geometricamente.
c) Mostre que o subespaçco das funções contínuas contidas em X é exatamente X_1.

22) Seja $f(x)$ uma função contínua em todo $\mathbb{R}$ satisfazendo a relação funcional

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y) \tag{3}$$

a) Determine as funções constantes que verificam (3).
b) Assuma que $f(x)\not\equiv 0$. Mostre que f é par.
c) Assuma que $f(x)\not\equiv 0$. Mostre que se x_0 é um zero de f então $p=4x_0$ é um período de f. Mostre que $f(p)=1$.
d) Assuma que $f(x)\not\equiv 0$. Suponha que p seja um período de f. Estude os possíveis valores de de $f\left(\dfrac{p}{2}\right)$. Mostre que se $\dfrac{p}{2}$ não é um período de f então $\dfrac{p}{4}$ é um zero de f.

23) Estude quanto a continuidade a função

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é irracional}\\ \dfrac{1}{q} & \text{se } x=\dfrac{p}{q} \text{ com } p,q \text{ primos entre si}\end{cases}$$

24) Considere f uma função real definida no intervalo fechado $[0,1]$ satisfazendo a condição

$$|f(x)-f(y)|\leqslant K\sqrt{|x-y|}, \qquad \forall x,y\in[0,1] \tag{4}$$

onde K é uma constante positiva qualquer.
a) Mostre que f é uniformemente contínua em $[0,1]$.
b) Mostre que o conjunto X das funções que satisfazem (4) forma um espaço vetorial.
c) Exiba uma família de funções contínuas em $[0,1]$ que não verifique a condição (4). Estude a diferenciabilidade desta família em $[0,1]$.
d) Será que uma função contínua em $[0,1]$, diferenciável em $(0,1)$ com derivada limitada verifica a condição (4) ?
e) Dê um exemplo de uma função satisfazendo (4) que seja diferenciável em $(0,1)$, mas cuja derivada não seja limitada.

25) Considere função $f(x) = \sqrt[5]{x + \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt[5]{x - \sqrt{x^2 - 1}}$. Determine o conjunto $f^{-1}(2)$.

26) Considere a função $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ para $x \in [0, 1]$. Sem usar o cálculo diferencial mostre que f é decrescente. Determine o máximo global e o mínimo global de f.

27) Considere a função $f(x) = \dfrac{x^r - 1 - r(x-1)}{(x-1)^2}$. Usando obrigatorialmente o conhecimento da série binomial adquirido na Lista 3, mostre que $f(x) \to \dfrac{r(r-1)}{2}$, quando $x \to 1$.

28) Usando obrigatoriamente o conhecimento da série binomial mostre que o limite de $f_n(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \cdots + \sqrt{x+n} - n\sqrt{x}$, quando $x \to \infty$ é zero.

29) Usando obrigatoriamente o conhecimento da função exponencial mostre que o limite de $f_n(x) = n^2(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}), x > 0$, quando $n \to \infty$ é $\log x$. Mostre também o mesmo resultado usando a regra de l'Hôpital. Compare os dois métodos.

30) Usando obrigatoriamente o conhecimento da função exponencial mostre que $$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to\infty}\prod_{p=1}^{n}\left(\frac{x-p}{x+p}\right)^x\right) = 0.$$

31) Utilizando obrigatoriamente série de potências encontre os limites abaixo.
  a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{\cos x + 1} = 2.$
  b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x} = 0.$

32) Mostre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 0}\left(\sin^2 x + \cdots + \sin^2(nx)\right)^{1/(n^3x^2)}\right) = \mathrm{e}^{1/3}$. Trocando-se a ordem dos limites o que acontece ?

33) Usando obrigatoriamente série de potências calcule o limite de $f(x) = (\sin x)^{\tan x}$, quando $x \to \pi/2, x < \pi/2$, mostrando que este limite é 1. Mostre também o mesmo resultado usando a regra de l'Hôpital. Compare os dois métodos.

34) Mostre que $\displaystyle\lim_{p\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi\, p!x)\right)$ é igual a 1, se x é racional e é igual a 0, se x é irracional. Mostre também que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{p\to\infty}\cos^n(\pi\, p!x)\right)$ é igual a 1, se x é racional, mas não existe quando x é irracional. Conclua que a ordem dos limites interfere no resultado final !

35) Mostre que existe uma única função real definida em todo $\mathbb{R}$ satisfazendo a

relação funcional $(1-x)f(x-1)+f(1-x)=1-x$. Calcule-a explicitamente.

Desigualdades e convergência envolvendo funções clássicas

36) Considere a função exponencial e^z.

a) Mostre que

$$\left|\mathrm{e}^z - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{k!}\right| \leqslant \frac{2}{n!} \cdot |z|^n, \qquad \text{para} \quad n \geqslant 1 \quad \text{e} \qquad |z| \leqslant 1 + \frac{n-1}{2}$$

conclua que

$$|\,\mathrm{e}^z - 1| \leqslant 2|z|, \qquad |z| \leqslant 1$$

b) Levando em conta a estimativa acima, obtenha que

$$\mathrm{e} = 2,71828182845\ldots$$

estimando o erro de sua estimativa.

c) Mostre, usando obrigatoriamente a estimativa logo acima, que a série que determina a função exponencial $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge normalmente em compactos. Mostre o mesmo resultando usando o seu conhecimento sobre o domínio de convergência da série.

37) Considere a função logarítmo

a) Mostre a expansão em série

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots \quad , \qquad |z| < 1$$

b) Mostre a estimativa

$$|\log(1+z) - z| \leqslant \frac{1}{2} \frac{|z|^2}{1 - |z|} \ , \quad |z| < 1$$

Deduza que

$$|\log(1+z) - z| \leqslant |z|^2 \ , \quad |z| < 1/2$$

38) (*Lema da composição*) Seja K um espaço métrico compacto e seja f_n uma seqüência de funções contínuas reais em K, que converge para uma função contínua f em K na norma do sup. Ou seja $\|f_n - f\|_{\sup} \to 0$, quando $n \to \infty$.

a) Mostre que e^{f_n} converge à e^f, na norma do sup . *Sugestão*: Use as estimativas acima.

b) Mostre o teorema de convergência de Euler: Ou seja, mostre que a série

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n, \quad n \geqslant 1$$

converge *uniformemente em compactos de* $\mathbb{C}$ à e^z . *Sugestão*: Use as estimativas acima, combinado com o item b).

39) (*A função zeta de Riemann*) A função *zeta de Riemann* está definida por

$$\zeta(z) := \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

Mostre que ζ converge normalmente para $z > 1$.
Nota: O números $\zeta(2k), k \in \mathbb{N}^*$ podem ser calculados conhecidos os números (racionais) de Bernoulli (veja exerc. 42), Lista3). O resultado é o seguinte (fórmula de Euler):

$$\zeta(2k) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}$$

Nota cultural: Embora a série acima define um a função analítica no semiplano aberto $\Re z > 1$, a função zeta de Riemann, admite um prolongamento analítico à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, sendo o ponto 1 um pólo simples de resíduo 1. Logo ζ é uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ cujo único pólo $z = 1$ é um pólo simples de resíduo 1. A famosa *hipótese de Riemann*, tem sido considerado um dos *problemas do milênio*, afirmando que os zeros de ζ na *faixa crítica* $0 \leqslant \Re z \leqslant 1$, se encontram na reta $\Re z = \frac{1}{2}$. Hardy em 1914 mostrou que existem infinitos zeros de ζ na reta $\Re z = 1/2$, Sabe-se que $z = -2, -4, \ldots$ são zeros de ζ e que ζ não se anula fora da faixa crítica $0 \leqslant \Re z \leqslant 1$ (veja relação de Riemann abaixo). Sabe-se também que ζ não se anula nas retas $\Re z = 0$ e $\Re z = 1$.
A função zeta de Riemann e a *função Gamma* estão relacionadas pela *relação funcional de Riemann*:

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1}\Gamma(1-z)\zeta(1-z)\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right), \qquad -1 < \Re z < 0$$

O leitor interessado neste assunto pode consultar refs. 9), 14), 18).

40) Mostre que se $p > 0$ existe uma constante positiva C_p tal que

$$\log x \leqslant C_p x^p, \qquad \forall x > 0$$

De modo análogo, mostre que se $0 < x < 1$, então existe uma constante positiva C_0 tal que

$$1 - x \leqslant C_0 \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

41) (*Produtos infinitos*) Considere $p_n = \prod_{k=0}^{n}(1+b_n)$, onde $b_n \geqslant 0$.

a) Mostre que

$$1 + \sum_{k=0}^{n} b_k \leqslant p_n \leqslant e^{\left(\sum_0^n b_k\right)}$$

i) Conclua que o produto $\prod_{k=0}^{\infty}(1+b_n)$, onde $b_n \geqslant 0$, converge se e somente se $\sum_0^\infty b_k < \infty$. Além disso, conclua que quando o produto converge, $\prod_{k=0}^{\infty}(1+b_n) \geqslant 1$, e quando o produto diverge, $\prod_{k=0}^{\infty}(1+b_n) = \infty$.

b) Agora considere $q_n = \prod_{k=0}^{n}(1-b_n)$, onde $b_n \geqslant 0$. Mostre que se

42) $0 \leqslant b_n < 1$, então tem-se que

$$1 - \sum_{k=1}^{n} b_n \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1-b_k) \leqslant e^{\left(-\sum_{k=1}^{n} b_k\right)}$$

i) Conclua que o produto $\prod_{k=0}^{\infty}(1-b_n)$, onde $b_n \geqslant 0$, converge se $\sum_0^\infty b_k < \infty$. Além disso, conclua que se $0 \leqslant b_n < 1$, $\sum_0^\infty b_k = \infty$, implica que $\prod_{k=0}^{\infty}(1-b_n)$, " diverge" à zero.

43) Dizemos que o produto $\prod_{k=0}^{\infty}(1+b_n)$, é *absolutamente convergente*, se

$\prod\limits_{k=0}^{\infty}(1+|b_n|)$ converge. Mostre que

$$|(1+\beta_1)\cdots(1+\beta_n)-1| \leqslant (1+|\beta_1|)\cdots(1+|\beta_n|)-1$$

a) Mostre que um produto $\prod\limits_{k=0}^{\infty}(1+b_n)$ absolutamente convergente é convergente. Mostre também que o produto $\prod\limits_{k=0}^{\infty}(1+b_n)$, é absolutamente convergente se e somente se, $\sum\limits_{0}^{\infty}|b_k| < \infty$.

44) (*Produtos de Blaschke*) Considere $\{a_n\}$ uma seqüência de números reais não nulos satisfazendo $|a_n| < 1$. Suponha que a seqüência satisfaça a *condição de Blaschke*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|) < \infty \tag{5}$$

a) Usando resultados obtidos nos itens anteriores, mostre que o produto de Blaschke
$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z-a_n}{1-a_nz}\cdot\frac{-|a_n|}{a_n}$$
converge absolutamente para $|z| < 1$ e normalmente em compactos de $\{|z| < 1\}$. *Sugestão*: Estime
$$\left|1-\frac{z-a_n}{1-a_nz}\cdot\frac{-|a_n|}{a_n}\right|$$
para $|z| \leqslant r < 1$.

Nota: Se f é uma função analítica limitada, não identicamente nula ($f \not\equiv 0$), em $\{|z| < 1\}$, (na verdade basta f na classe $\mathcal{N}$ de funções de *Nevanlinna*) e se $a_1, a_2, \ldots$ são os zeros de f, listados com multiplicidades, então a condição de Blaschke dada na equação (5) é satisfeita. A demonstração disto está baseada na bem conhecida *fórmula de Jensen*, veja refs. 9), 14), 15), 17) e 18). Como conseqüência disto, temos o seguinte resultado:
Se $f(z)$ e $g(z)$ são duas funções analíticas limitadas em $\{|z| < 1\}$, e se $a_1, a_2, \ldots$ são os zeros de $f(z) - g(z)$ satisfazendo $\sum(1-|a_n|) = \infty$; então $f(z) \equiv g(z), \quad |z| < 1$.

45) (*Fatores primários de Weierstrass*).Para cada $p \in \mathbb{N}^*$, considere

$$E(z;0) = (1-z), \qquad E(z;p) = (1-z)\,\mathrm{e}^{\left(z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^p}{p}\right)}, \qquad p \geqslant 1$$

As quantidade $E(z;p)$ são chamadas de *fatores primários de Weierstrass*. Mostre que para $|z| < \frac{1}{2}$, tem-se que

$$|E(z;p) - 1| \leqslant 3|z|^{p+1}$$

Os fatores primários de Weierstrass constituem a idéia fumdamental para demonstrar o *teorema fatoração de Weierstrass* que simplificadamente diz o seguinte: Se a_n é uma seqüência de números complexos , tal que $|a_n| \to \infty$ (quando $n \to \infty$,) então existe uma função inteira cujos zeros são exatamente os a_n. O leitor interessado neste assunto pode consultar refs. 9), 14), 15), 17) e 18).

BIBLIOGRAFIA SUCINTA

1) Alan F. Beardon. *Iteration of Rational Functions.* Springer, 1991.

2) Augus E. Taylor. *Introduction to Functional Analysis.* John Wiley and Sons, Inc, 1958.

3) Elon Lages Lima. *Curso de Análise Volume 1.* Projeto Euclides, 1995.

4) Elon Lages Lima. *Elementos de Topologia Geral.* Projeto Euclides, 1970.

5) Elon Lages Lima. *Espaços Métricos.* Projeto Euclides, 1993.

6) Haïm Brezis. *Analyse Fonctionnelle.* Masson, 1983.

7) Henri Mascart e Marius Stoka. *Fonctions d'une Variable Réele.* PUF, 1986.

8) G. H. Hardy, J. E. Littlewood e G. Pólya. *Inequalities.* Cambridge Press , 1973.

9) John B. Conway. *Functions of One Complex Varialbles I* (second edition). Springer, 1978.

10) J. Rivaud. *Séries; équations différentielles.* Vuibert, 1973.

11) M. Spivak, *Calculus.* Dois volumes. Ed. Reverté, Barcelona, 1970.

12) Raghavan Narasimhan e Yves Nievergelt. *Complex Analysis in One Variable* (second edition). Birkhäuser, 2001.

13) Ralph P. Boas, Jr. *A Primer of Real Functions*. Math. Assoc. of Amer. John Wiley and Sons, Inc. 1960.

14) Reinhold Remmert. *Theory of complex functions*. Springer, 1991 (*Readinds in Mathematics*). *Classical topics in complex function theory*, Springer, 1998.

15) Robert E. Greene e Steven G. Krantz. *Function Theory of One Complex Variable*. J. Wiley & Sons, 1997.

16) Walter Rudin. *Princípios de Análise Matemática*. Livro Técnico, N, 1971.

17) Walter Rudin. *Real and Complex Analysis* (third edition). McGraw-Hill, 1987.

18) Srishti D. Chatterji. *Cours d'Analyse 1,2*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1997.

19) Tom M. Apostol. *Calculus, vol. II* (second edition). J. Wiley & Sons, 1969.