

## LISTA 4 DE ANÁLISE REAL 2009

RICARDO SA EARP

### *Limites e continuidade em espaços métricos*

- (1) Seja  $f(x) = v \cdot x$ , onde  $\cdot$  denota o produto escalar em  $\mathbb{R}^n$ , e  $v \in \mathbb{R}^n$  é um vetor fixado. Discuta a continuidade de  $f(x)$ . Mostre que os semi-planos dados pelas equações

$$\{x; v \cdot x > \alpha\} \quad \text{e} \quad \{x; v \cdot x \geq \alpha\}$$

são subconjuntos abertos e fechados, respectivamente. Deduzir que o hiperplano  $\{x; v \cdot x = \alpha\}$ , é um subconjunto fechado de  $\mathbb{R}^n$ . Tais resultados se estendem (da maneira natural) à espaços de Hilbert ?

- (2) Dê uma caracterização de continuidade de uma função  $f$  que leva um espaço métrico  $X$  num espaço métrico  $Y$  em termos de seqüências.
- (3) Mostre que se  $f, g$  são funções contínuas que levam um espaço métrico  $X$  em  $\mathbb{R}^n$ , então se  $f(a) \neq g(a)$ , para certo  $a \in X$ , segue-se que  $f(x) \neq g(x)$ , numa vizinhança de  $a$ .
- (4) Dizemos que uma aplicação  $f$  que leva um espaço métrico  $X$  num espaço métrico  $Y$  é *aberta* (resp. *fechada*), se a imagem por  $f$  de um aberto de  $X$  (resp. fechado) é um aberto de  $Y$  (resp. fechado).
- (a) Dê exemplos de aplicações contínuas reais definidas em subconjuntos do espaço Euclideano que sejam abertas, mas não sejam fechadas.
- (b) Dê exemplos de aplicações contínuas definidas de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n$  que não sejam abertas nem fechadas.
- (c) Dê exemplos de aplicações contínuas  $f$  definidas num intervalo  $I$  da reta em  $\mathbb{R}^2$  que sejam injetivas mas não produzem um homeomorfismo entre  $I$  e sua imagem  $f(I)$ .
- (d) Sejam  $X_1$  e  $Y_1$  subconjuntos de  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Seja  $f : X_1 \rightarrow X_2$  uma função contínua bijetiva tal que para todo aberto  $A$  de  $X$  (com a topologia induzida),  $f(A)$  é um aberto de  $Y_1$  (com a topologia induzida). Mostre que  $f$  é um homeomorfismo.

- (5) Dê exemplos de funções definidas numa vizinhança da origem de  $\mathbb{R}^2$  que admitem um mesmo limite quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , ao longo de raios que chegam a origem  $(0, 0)$  de  $\mathbb{R}^2$ , mas que não sejam contínuas na origem.
- (6) Seja  $X$  um espaço de Hilbert com produto interno  $\langle, \rangle$ . Mostre que  $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ , é uma função contínua.
- (7) Seja  $T : X \rightarrow Y$  uma transformação linear sobrejetiva de um espaço vetorial normado de dimensão finita  $X$  (leia  $\mathbb{R}^n$ ) sobre um espaço vetorial normado de dimensão finita  $Y$ , leia  $\mathbb{R}^n$ . Mostre que a inversa  $T^{-1}$  existe e é contínua se e somente se existe  $\lambda > 0$  tal que

$$\|T(x)\|_Y \geq \lambda \|x\|_X$$

- (8) Responda verdadeiro ou falso. Caso verdadeiro, deduza, caso falso dê um contraexemplo.
- (a)  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .
- (b)  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ .
- (c) Se  $A$  e  $B$  são fechados disjuntos tal que  $\forall p \in B, \text{dist}(p, A) > 0$ , então  $\text{dist}(A, B) > 0$ .
- (d) Dada  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função considere o gráfico de  $f$  dado por  $A = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$ . Segue então que se o gráfico de  $f$  é fechado,  $f$  é contínua.
- (9) Exiba um homeomorfismo entre o intervalo  $(-1, 1)$  e a reta real  $\mathbb{R}$ .
- (10) Considere a esfera unitária  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . Seja  $N = (0, 0, 1)$  o polo norte da esfera. Para cada  $p \in \mathbb{S}^2, p \neq N$ , trace a reta  $r$  passando por  $N$  e  $p$ . Seja  $f(p)$  o ponto que  $r$  corta ou perfura o plano horizontal  $\{z = 0\}$ . Deduza que a aplicação  $p \mapsto f(p)$  é um homeomorfismo, que leva  $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$  homeomorficamente a  $\mathbb{R}^2$ .
- (11) (*Um teorema do ponto fixo*). Seja  $X$  um conjunto fechado não vazio de  $\mathbb{R}^n$  e seja  $f : X \rightarrow X$  uma contração de constante  $k, 0 \leq k < 1$ , ou seja  $f$  satisfaz

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|, \forall x, y \in X.$$

Deduza que  $f$  tem um único ponto fixo, i.e existe  $p \in X$  tal que  $f(p) = p$ .