LISTA 4 DE ANÁLISE REAL 2010

RICARDO SA EARP

Sequências e séries

(1) Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números reais. Defimos:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$$
$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$$

Seja $\mathcal{A} = \{$valores aderentes ou pontos limites da sequência $\quad x_n\} \subset \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

(a) Deduza que $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \sup \mathcal{A}$.

(b) Deduza que $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \inf \mathcal{A}$.

(c) Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ duas sequências de números reais. Sejam $a := \liminf x_n, b := \limsup x_n, c := \liminf y_n$, e $d := \limsup y_n$. Deduza que

(d)

$$b + c \leqslant \limsup(x_n + y_n) \leqslant b + d$$
$$a + c \leqslant \liminf(x_n + y_n) \leqslant a + d$$

sempre que $a+c, a+d, b+c, b+d$ não são da forma $+\infty-\infty$ ou $-\infty + \infty$.

Além disso deduza que

(e)

$$bc \leqslant \limsup x_n y_n \leqslant bd$$
$$ac \leqslant \liminf x_n y_n \leqslant ad$$

sempre que ac, ad, bc, bd não são da forma $0 \cdot \infty$ ou $\infty \cdot 0$.

(2) Deduza de duas maneiras distintas que se $\sum\limits_n |a_n| < \infty$ as seguintes séries são convergentes

$$\sum_n |a_n a_{n+1}|^{1/2}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{|a_n|^{1/2}}{n}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{|a_n|^{1/2}}{n^{1/2+p}}, \qquad p > 0.$$

(3) Deduza que se $\sum a_n := A, \quad \sum b_n := B$ são duas séries que convergem absolutamente então o produto das séries converge absolutamente e temos que

$$\left(\sum_n a_n\right)\left(\sum_n b_n\right) = \sum_n c_n$$

onde $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$.

Sugestão: Defina $A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, B_n := \sum_{k=0}^{n} b_k,\ C_n := \sum_{k=0}^{n} c_k$ e $\beta_n := B_n - B$. Escreva:

$C_n = A_n B + a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_0$. Estime a quantidade $\gamma_n := a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_0$, deduzindo que $\limsup |\gamma_n|$ é igual a zero, levando em conta que $\beta_n \to 0\,(n \to \infty)$ e que $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

(4) Seja $\{x_n\}$ uma sequência e seja $\{\alpha_n\}$ uma sequência de números reais positivos. Suponha que o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_n|}{\alpha_n}$$

exista e seja igual a $0 \leqslant L \leqslant \infty$. Deduza que

(a) Se $L < \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$ então a série $\sum x_n$ converge absolutamente.

(b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ e $L > 0$ então $\sum |x_n| = \infty$.

(c) Discuta a convergência absoluta das séries cujo termo geral é dado por $x_n = nx/(1+n^3)$ e $x_n = (x+nx^2)/(1+n+n^2), n \in \mathbb{N}$, respectivamente.

(5) Neste exercício, vamos deduzir que ℓ^p, $p \geqslant 1$ é um espaço de Banach.

Sugestão: Considere $x_n = (c_1^{(n)}, c_2^{(n)}, \ldots, c_k^{(n)}, \ldots)$ uma sequência de Cauchy em ℓ^p.

(a) Deduza que para k fixado, existe $\lim_{n\to\infty} c_k^{(n)} := c_k$.

(b) Deduza que a sequência $\{c_k\}$ está em ℓ^p, usando um argumento parecido com o que foi feito para mostrar que ℓ^p é um espaço vetorial normado.

(c) Fazendo $x = \{c_k\}$, deduza que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$, concluindo que ℓ^p é completo.