LISTA 4 DE ANÁLISE REAL 2011

RICARDO SA EARP

Limites e continuidade de funções reais

(1) Dado um número real r, considere a função real $f(x)$ definida por

$$\begin{cases} f(x) = x\left|1+\dfrac{1}{x}\right|^r & \text{se } x \neq 0, -1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

(a) Mostre que $f(x)$ é contínua no conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

(b) Mostre que $f(x)$ é diferenciável neste conjunto e que sua derivada verifica

$$f'(x) = f(x) \cdot \frac{x+1-r}{x(x+1)} \tag{1}$$

para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

(c) Mostre que para $r < 1$, $f(x)$ é contínua em $x = 0$ e que para $r \geqslant 1$, $f(x)$ é descontínua em $x = 0$.

(d) Mostre que se $r < 0$ então $f'(0) = 0$, se $r = 0$ então $f'(0) = 1$. O que acontece para $0 < r < 1$?

(e) Usando a fómula (1) acima, mostre que $f'(x)$ é contínua em $x = 0$, para $r \leqslant 0$.

(f) Mostre que para $r > 0$, $f(x)$ é contínua em $x = -1$.

(i) Mostre que se $r > 1$, então $f'(-1) = 0$ e $f'(x)$ é contínua em $x = -1$.

(ii) Mostre que se $r = 1$, então $f(x)$ possui uma derivada lateral à direita e uma derivada lateral à esquerda em $x = -1$. Calcule-as.

(2) Seja

$$f(x) = \begin{cases} x \cot x & \text{se } 0 < |x| < \pi \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Deduza que

(a) f é limitada.
(b) f é de classe C^0 (ou $f \in C^0(\mathbb{R})$).
(c) O gráfico de f é completo.
(d) f é própria.
(e) Usando o MAPLE, esboce o gráfico de f.

(3) Lembre-se que $\cosh t = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ e $\sinh t = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$. Lembre-se também que $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ e que $(\cosh t)' = \sinh t$, $(\sinh t)' = \cosh t$. Define-se $\coth t = \frac{\cosh t}{\sinh t}$, $t \neq 0$.
   (a) Deduza que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh \pi x}{\pi x} = 1$$

   (b) Deduza que a função

$$f(x) = \begin{cases} \pi x \coth \pi x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

   é de classe C^0 .
   (c) Deduza que a aplicação $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $X(t) = (t, f(t))$ é própria.
   (d) Usando o MAPLE, esboce o gráfico de f.

(4) Responda verdadeiro ou falso em cada item. Caso verdadeiro esboce uma dedução sucinta correta e exiba um exemplo que ilustre a afirmação, se for o caso. Caso falso, explica a falsidade ou exiba um contraexemplo, conforme a situação. Justifique a sua resposta. Não serão aceitas respostas sem justificativas corretas.

   (a) A função $f(x) = x^{1/3}$ é α-Hölder contínua, $\alpha = 1/3$, na semireta $[0, \infty)$.
   (b) A função $f(x) = x^{2/3}$ é α-Hölder contínua, $\alpha = 1/3$, num conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}$.
   (c) A função $f(x) = x^{2/3}$, é 1/3-Hölder contínua em toda reta $\mathbb{R}$.
   (d) Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida num aberto de $\mathbb{R}^2$ que contém a origem, satisfazendo $f(0,0) = 0$. Seja $F(x,y) = e^{f(x,y)}$, $\quad (x,y) \in U$. Segue que existe $\varepsilon > 0$, tal que $F(x,y) > 1/2$, para todo $(x,y) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$.

(e) Existe uma função contínua $f : [1,2] \to [1,2]$ tal que $f(t) \neq t, \forall t \in [1,2]$.

(f) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to (-\infty, 0)$ uma função contínua. Assuma que $f(0,0) = -2$ e que

$$\lim_{\|p\| \to \infty} f(p) = 0$$

(i) Segue que $m := \min_{\mathbb{R}^2}\{f(x,y)\}$ existe e $m \leqslant -2$.

(ii) Existe uma tal f da forma $f(x,y) = Ae^{g(x,y)}$, onde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e A é uma constante.

(g) Seja $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ uma função contínua, tal que $f(0) = 1/2$. Assuma que f satisfaz:
Se $\{x_n\}$ é uma sequência satisfazendo $|x_n| \to \infty$ então $f(x_n) \to \infty$.

(i) Existe uma tal f da forma de um polinômio de grau $2n$, para qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$.

(ii) Nem sempre para uma tal f temos que o conjunto $f^{-1}([-1,1])$ é um compacto.

(5) Seja X um conjunto e $f_n : X \to \mathbb{R}$ uma função real, $n \in \mathbb{N}$. Considere a série de funções $\sum f_n(x)$, $x \in X$. Dizemos que esta série é *normalmente convergente*, se existe uma sequência de números reais positivos $\{a_n\}$, com $|f_n(x)| \leqslant a_n$ e $\sum a_n < \infty$.

(a) Deduza que uma série de funções $\sum f_n(x)$, $x \in X$, normalmente convergente é absolutamente convergente, *i.e* $\sum |f_n(x)| < \infty$, $\forall x \in X$.

(b) Seja $\alpha : [0,1] \to (-1,1)$, uma função contínua. Seja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n(x), \quad x \in [0,1] \tag{1}$$

(i) Deduza que a série (1) é absolutamente convergente, $\forall x \in [0,1]$.

(ii) Deduza que a série (1) é normalmente convergente.

(c) Seja $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real limitada, *i.e* $\exists M > 0$; $|\beta(x)| \leqslant M$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Seja $b \in (1, \infty)$. Defina:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta(nx)}{n^b}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

(i) Deduza que a série (2) é absolutamente convergente, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(ii) Deduza que a série (2) é normalmente convergente.

(6) Considere o *teorema do valor intermediário*: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Seja d tal que $f(a) < d < f(b)$. Segue que existe $c \in (a, b)$, tal que $f(c) = d$.

(a) Considere a função polinomial

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1, \qquad n > 0$$

(i) Mostre que $f_n(x)$ possui um único zero positivo a_n. Estime a_2.

(ii) Mostre que a seqüência $\{a_n\}$ é monótona decrescente e deduza que $a_n \downarrow \frac{1}{2}$ (quando $n \to \infty$)

(b) Sejam $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ duas funções contínuas, satisfazendo $f(0) = 1$ e $g(0) = 2$. Assuma que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ e que $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$. Deduza que que existe $y > 0$ tal que $f(y) = g(y)$.

(7) Considere o conjunto X das funções definidas em toda reta real $\mathbb{R}$ que verificam a condição funcional

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{2}$$

(a) Mostre que X é um espaço vetorial.

(b) Mostre que X contém um subespaço vetorial X_1 de dimensão 2, interpretando a condição (2) geometricamente.

(8) Considere f uma função real definida no intervalo fechado $[0, 1]$ satisfazendo a condição

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K\sqrt{|x - y|}, \qquad \forall x, y \in [0, 1] \tag{4}$$

onde K é uma constante positiva qualquer.

(a) Mostre que f é uniformemente contínua em $[0, 1]$.

(b) Mostre que o conjunto X das funções que satisfazem (4) forma um espaço vetorial.

(c) Exiba uma família de funções contínuas em $[0, 1]$ que não verifique a condição (4). Estude a diferenciabilidade desta família em $[0, 1]$.

(d) Será que uma função contínua em $[0, 1]$, diferenciável em $(0, 1)$ com derivada limitada verifica a condição (4) ?

(e) Dê um exemplo de uma função satisfazendo (4) que seja diferenciável em $(0, 1)$, mas cuja derivada não seja limitada.

(9) Considere a função $f(x) = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x}$ para $x \in [0, 1]$. Sem usar o cálculo diferencial mostre que f é decrescente. Determine o máximo global e o mínimo global de f.

(10) Considere a função $f(x) = \dfrac{x^r - 1 - r(x-1)}{(x-1)^2}$, onde $r \in \mathbb{Z}^+$. Usando obrigatorialmente o conhecimento da série binomial, mostre que

(a) $f(x) \to \dfrac{r(r-1)}{2}$, quando $x \to 1$.

(11) Seja X um subconjunto da reta real $\mathbb{R}$. Seja $f : X \to \mathbb{R}$, uma aplicação uniformemente contínua. Deduza que se a é um valor aderente a X, então limite $\lim_{x\to a} f(x)$, existe. Conclua que toda aplicação uniformente contínua $f : X \to \mathbb{R}$, admite uma única extensão contínua $F : \overline{X} \to \mathbb{R}$, (i. e, $F|_X = f$, F restrita a X é igual à f) que é uniformemente contínua. Além disso, conclua que se X é limitado, então $f(X)$ é limitado.

(12) Seja $C > 0$ e $\alpha \in (0,1)$. Seja $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função α-Hölder contínua, *i.e* $f(x)$ satisfaz:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha, \ \forall x, y \in (a,b).$$

(a) Deduza, *com rigor*, que os limites $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to b^-} f(x)$, existem.

(b) Deduza que existe uma função contínua $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $F(x) = f(x), \forall x \in (a,b)$ ($F(x)$ é chamada de extensão contínua de $f(x)$). Além disso deduza que $F(x)$ é α-Hölder contínua (em $[a,b]$). Escreva com rigor.

(c) Deduza que $f(x) = |x|^{1/n}$, $x \in \mathbb{R}$, é α-Hölder continua com expoente de Hölder $\alpha = 1/n$.

(13) (a) Sejam $\alpha, \beta \in (0,1)$. Deduza que se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ e $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ são duas funções α-Hölder continua e β-Hölder continua, respectivamente, então o produto fg também é Hölder contínua, explicitando o expoente de Hölder do produto.

(b) Deduza que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ são duas funções α-Hölder continua e β-Hölder continua, respectivamente, então a composta $f \circ g$ é $\alpha\beta$-Hölder contínua.

(14) Seja $C > 0$ e $\alpha \in (0,1)$. Seja $\mathcal{F} = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\}$ uma família de funções α-Hölder contínua com a mesma constante C. Deduza que $\mathcal{F}$ é equicontínua.

(15) Seja $f : [a,b] \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^0, onde I é um intervalo aberto da reta. Seja $\varepsilon > 0$. Seja x_0 um ponto de I. Deduza que existe uma vizinhança V de x_0, tal que

$$\forall x \in V, \forall t \in [a,b], |f(t,x) - f(t,x_0)| < \varepsilon$$

(16) Seja $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2}$, $x^2 + y^2 \neq 0$. Estude o comportamento de $f(x,y)$ na origem, estudando $\lim\limits_{x^2+y^2 \to 0} f(x,y)$.