ANÁLISE REAL-2002.2–Lista 5

Professor: Ricardo Sá Earp

Espaços vetoriais normados, de Banach, de Hilbert
Aproximações polinomiais (I)
Funções semi-contínuas

Espaços vetoriais normados, de Banach, de Hilbert

1) Sejam X e Y espaço vetoriais normados e seja $T:\ X \to Y$ uma transformação linear.
   a) Mostre que, ou bem T é contínua num ponto de X, ou bem X não é contínua em nenhum ponto de X. O que acontece quando X e Y tem dimensão finita ?
   b) Mostre que $T:\ X \to Y$ é contínua em X, se e somente se existe uma constante positiva C tal que $\|T(x)\|_Y \leqslant C\,\|x\|_X$.
   c) Dê um exemplo de uma transformação linear entre dois espaço de dimensão infinita (necessariamente) que não é contínua. *Sugestão*: Considere o espaço das funções contíuas em $[0,1]$ e considere a noma do sup e a norma da integral do módulo.
   Dizemos que X e Y são *topologicamente isomorfos*, se existe uma uma transformação linear $T:\ X \to Y$ inversível (ou seja existe T^{-1}), com T e T^{-1} contínuas.
   c) Mostre que X e Y são topologicamente isomorfos, se e somente se existem constantes positivas c e C tal que

$$c\,\|x\|_X \leqslant \|T(x)\|_Y \leqslant C\,\|x\|_X$$

      i) Considere um espaço vetorial X dotados de duas normas $\|\|_1$ e $\|\|_2$. Mostre que tais normas determinam a mesma topologia, se e somente se as duas normas são equivalentes.
      ii) Dê exemplos de espaço vetoriais normados que não sejam topologicamente equivalentes.

2) O lema de Riesz afirma o seguinte (para uma demonstração consulte, por exemplo, a ref. 2). Seja X um espaço vetorial normado. Seja X_0 um subespaço fechado e próprio de X ($X_0 \subsetneq X$). Tem-se então que para cada t com $0 < t < 1$, existe um vetor unitário $x_t \in X$ e $\|x - x_t\| \geqslant t$, $\forall x \in X_0$.
   a) Use o lema de Riesz para demonstrar que a esfera unitária $X = \partial B_1(0)$ é compacta se e somente se X tem dimensão finita.
3) Dê exemplos de funcionais lineares em $l^p, p \geqslant 1$ contínuos.
4) Suponha que $p > 1$ e seja q seu expoente conjugado, i.e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Dê exemplos de transformações lineares contínuas " naturais" que leva l^q em $(l^p)'$ (dual).

Seja X um espaço vetorial com produto interno $<,>$. Dizemos que x e y são ortogonais se $< x, y >= 0$; denotamos $x \perp y$. Dizemos que $\mathcal{S}$ é um conjunto *ortogonal*, se qualquer par de pontos distintos x e y, tem-se que x é ortogonal à y. Se, além disso, os vetores de $\mathcal{S}$ são unitários ($\|x\| = 1, \forall x \in S$), dizemos que $\mathcal{S}$ é *ortornormal*.

5) (*Desigualdade de Bessel*) Seja $\mathcal{S}$ um conjunto ortornormal de um espaço vetorial X dotado de um produto interno $<,>$. Seja $u_1, \dots, u_n$ elementos distintos de $\mathcal{S}$. Seja $x \in X$. Mostre que

$$\sum_{i=1}^{n} | < x, u_i > |^2 \leqslant \|x\|^2 \tag{1}$$

Mostre ainda que o conjunto dos $u \in \mathcal{S}$ tal que $< x, u > \neq 0$, é ou bem finito ou infinito enumerável. Se $x, y \in X$, mostre que

$$\sum_{\mathcal{S}} | < x, u >< y, u > | \leqslant \|x\| \, \|y\| \tag{2}$$

consequentemente

$$\sum_{\mathcal{S}} | < x, u > |^2 \leqslant \|x\|^2 \qquad \text{(desigualdade de Bessel)} \tag{3}$$

Sugestão: Para a primeira parte, considere a quantidade (produto interno)

$$\left\langle x - \sum_{1}^{n} < x, u_i >, x - \sum_{1}^{n} < x, u_i > \right\rangle$$

Para a primeira afirmação da segunda parte, use a desigualdade (1) para concluir que o conjunto $< x, u > \neq 0$, é uma união enumerável de conjuntos finitos. Para deduzir a equação (2) use a desigualdade de Cauchy para finitos $u_1, \dots u_n$, combinada com a equação (1), demonstrando (2) para uma coleção finita qualquer. Em seguida conclua.

6) Seja X um espaço vetorial separável dotado de um produto interno $<,>$ . . Seja $\mathcal{S}$ um conjunto ortornormal em X. Mostre que S é enumerável. *Sugestão*: a) Mostre que se $x \perp y$, e $\|x\| = \|y\| = 1$, então $\|x - y\| = \sqrt{2}$. Seja y_n um conjunto enumerável denso em X; mostre que a cada $x \in \mathcal{S}$ corresponde um n tal que $\|x - y_n\| < \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. Em seguida mostre que tal y_n está se correspondendo a um único x, estabelecendo um correspondência um-a-um entre o conjunto $\mathcal{S}$ e um subconjunto do conjunto enumerável $\{y_n\}$.

7) Considere um conjunto ortornormal finito do espaço vetorial X dotado do produto interno $<,>$; formado pelos pontos $u_1, \dots, u_n$. Seja M o subespaço de X gerado pelos $u_1, \dots, u_n$. Mostre que $\{u_1, \dots, u_n\}$ é uma base de M e cada elemento $x \in M$ se escreve da forma $x =< x, u_1 > u_1 + \cdots + < x, u_n > u_n$.

8) Seja X um espaço vetorial completo dotado do produto interno $<,>$. Seja $\{u_n\}$ um conjunto ortornormal infinito de X. Mostre que as séries da forma $\sum_1^\infty \xi_n u_n$ são convergentes se e somente se $\sum_1^\infty |\xi|^2 < \infty$. Neste caso mostre que

$$x = \sum_1^\infty < x, u_n > u_n \qquad (\xi_n =< x, u_n >)$$

Sugestão: Considere $s_n = \xi_1 u_1 + \cdots + \xi_n u_n$. Estime $\|s_n - s_m\|$. Para a segunda parte, use a primeira parte combinada com o resultado estabelecido no item 7).

Nota: O teorema de Riesz-Fischer da *teoria das séries de Fourier* é uma realização concreta do resultado anterior: Afirma que se $a_0, a_1, \dots$ e $b_0, b_1 \dots$ são duas seqüência de números reais tal que

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty \left(a_n^2 + b_n^2\right) < \infty$$

então existe uma função x em $\mathcal{L}^2(0,2\pi)$, tendo os a_n e b_n como seus coeficientes de Fourier, i.e

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}\,t, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}\,t$$

Neste caso $X = \mathcal{L}^2(0,2\pi)$ e os elementos correspondente a $u_1,\ldots,u_n,\ldots$, são

$$\frac{1}{2\pi}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

devido a que

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{imt}\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases}$$

O leitor pode verificar que os coeficientes $\xi_1, \xi_2, \ldots$ do resultado do item 7) acima estão relacionados com os *standard* coeficientes de Fourier pelas fórmulas: $\xi_1 = a_0\sqrt{\pi/2}, \xi_2 = a_1\sqrt{\pi}, \xi_3 = b_1\sqrt{\pi}, \ldots$. Pode-se mostrar que $\frac{1}{2\pi}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \ldots$ é um conjunto ortornormal completo; valendo a identidade de Parseval (veja em seguida):

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (x(t))^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

Um conjunto ortornormal $\mathcal{S}$ num espaço vetorial X dotado de um produto interno $<,>$ é chamado *completo* se não existe um conjunto ortogonal que contenha $\mathcal{S}$ estritamente; ou seja $\mathcal{S}$ não é subconjunto próprio de nenhum conjunto ortogonal " maior" ($\mathcal{S}$ é *maximal*). É um fato que todo espaço vetorial $X \not\equiv 0$ dotado de um produto interno $<,>$ possui um um conjunto ortornormal completo $\mathcal{S}$. Além disso, se $\mathcal{S}$ é um conjunto ortornormal qualquer, existe um conjunto ortornormal completo que contém $\mathcal{S}$.

Dizemos que $x \perp \mathcal{S}$, se x é ortogonal a cada elemento de $\mathcal{S}$; neste caso x é ortogonal ao subespaço gerado por $\mathcal{S}$, assim como é ortogonal ao fecho deste subespaço.

9) Seja X um espaço vetorial dotado de produto interno $<,>$ e seja $\mathcal{S} = \{u_n\}$ um conjunto ortonormal de X. Seja M o fecho do subespaço gerado pelos $\{u_n\}$ e defina a *projeção ortorgonal* de x em M, denotada por $x_{\mathcal{S}}$, por

$$x_{\mathcal{S}} = \sum_1^{\infty} < x, u_n > u_n$$

a) Mostre que $x \in M$ se e somente se $x = x_{\mathcal{S}}$. De qualquer maneira mostre que $x_{\mathcal{S}} \in M$ e $x - x_{\mathcal{S}} \perp M$. Logo, conclua que existe uma *decomposição ortogonal* $x = x_{\mathcal{S}} + x_{\mathcal{S}}^{\perp}$, onde $x_{\mathcal{S}}^{\perp} \perp \mathcal{S}$

b) Mostre que se $M = X$, então $\mathcal{S}$ é completo.

c) Mostre que se X é completo e se o conjunto ortornormal $\mathcal{S}$ é completo (i.e maximal) então $M = X$.

d) Exiba um conjunto ortornormal completo $\{u_n\}$ em l^2 e mostre a identidade de Parseval:

$$\|x\|_{l^2}^2 = \sum_1^{\infty} | < x, u_n > |^2$$

e) Mostre que se $x \perp \mathcal{S} \Rightarrow x = 0$, então $\mathcal{S}$ é completo.

f) (*Teorema de aproximação*) Dado $x \in X$, mostre que

$$\|x - x_{\mathcal{S}}\| \leqslant \|x - v\|, \qquad \forall v \in M$$

Além disso, vale a igualdade se e somente se $v = x_{\mathcal{S}}$.
Além disso, discuta a aproximação de funções contínuas em $[0, 2\pi]$ por *polinômios trigonométricos*

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

(aparecem os coeficientes de Fourier); assim como a aproximação de funções contínuas em $[-1, 1]$por polinômios de grau $\leqslant n$ (aparecem os polinômios de Legendre).

10) (*fórmula de Parseval*) Seja $\mathcal{S} = \{u_n\}$ um conjunto ortornormal de um espaço vetorial X munido de um produto interno $<,>$. Suponha que seja satisfeita a *identidade de Parseval*

$$\|x\|_{l^2}^2 = \sum_1^{\infty} | < x, u_n > |^2, \qquad \forall x \in X \tag{4}$$

Mostre que X é completo. Reciprocamente, mostre que se X é um espaço completo e $\mathcal{S}$ é um conjunto ortornormal completo, então a fórmula de Parseval é válida para todo x em X.

11) (*Processo de ortogonalização de Gram-Schimdt*) Seja $\mathcal{S} = \{x_n\}$ um conjunto infinito enumerável linearmente independente de um espaço vetorial X munido de um produto interno $<,>$. Mostre que existe um conjunto ortogonal $\{y_n\}$ com as seguintes propriedades
    (α) Cada elemento y_k é ortogonal ao subespaço gerado pelos $x_1, x_2, \dots x_{k-1}$.
    (β) O subespaço gerado pelos $y_1, \dots, y_k$ é o mesmo que o subespaço gerado pelos $x_1, \dots, x_k$.
    (γ) A seqüência $y_1, y_2, \dots$ é única a menos multiplicação por escalar, i.e se $y_1', y_2', \dots$ é outra seqüência em X satisfazendo α e β, para todo k, então para cada k existe um escalar c_k tal que $y_k' = c_k y_k$. Além disso o pode-se obter um conjunto ortornormal $\{u_n\}$, fazendo-se uma apropriada normalização. gerando o mesmo subespaçoM gerado por $\mathcal{S}$. *Sugestão*: Considere a fórmula

$$y_1 = x_1, u_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}, \quad y_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} < x_{n+1}, u_k > u_k, u_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{\|y_{n+1}\|}$$

12) Suponha que X seja um espaço vetorial de dimensão infinita munido de um produto interno que seja *separável*, não necessariamente completo. Mostre que X possui um conjunto enumerável completo $\mathcal{S}$ tal que o fecho do espaço gerado pelos elementos de $\mathcal{S}$ é todo X.

13) Seja X um espaço Hilbert de dimensão infinita que seja *separável*. Mostre que X é isométrico (isomorfo) a l^2.

14) (*Polinômios de Legendre*). No espaçco $L^2(-1, 1)$ (você pode pensar neste nível no espaço vetorial normado das funções contínuas em $[-1, 1]$, munido do produto interno $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$), considere o conjunto linearmente independente formado pelos polinômios $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$.
    a) Mostre que o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt leva ao seguinte conjunto ortogonal

$$y_0 = x_0 = 1, \quad y_1 = x_1 = t, \quad y_2 = t^2 - \frac{1}{3},$$
$$y_3 = t^3 - \frac{3}{5}t, \quad y_4 = t^4 - \frac{6}{7}t^2 + \frac{3}{35} \quad y_5 = t^5 - \frac{10}{9}t^3 + \frac{5}{21}t$$

Além disso, mostre que o coeficiente de x^n em y_n é igual a 1.
Será discutido em seguida que $y_n(t)$ é dado pela seguinte fórmula

$$y_n(t) = \frac{n!}{(2n!)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \left(t^2 - 1\right)^n$$

Os polinômios de Legendre estão definidos por

$$p_n(t) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \left(t^2 - 1\right)^n$$

i) Obtenha que os 6 primeiros polinômios de Legendre são

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

Os polinômios de Legendre $P_n(u)$ são dados alternativamente pelas suas funções geradoras:

$$\varphi(u,z) := (1 - 2uz + z^2)^{-1/2} = \sum_0^\infty P_n(u) z^n \qquad (*)$$

Note que a fórmula acima vem do fato que para u fixado, a função $z \mapsto \varphi(u,z)$, é uma função analítica num disco aberto centrado na origem; logo $(*)$ é o desenvolvimento de Taylor desta função em $z = 0$.

i) Utilizando a fórmula do binômio

$$(1-\zeta)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=1}^\infty \binom{-1/2}{k} (-\zeta)^k = 1 + \sum_{k \geqslant 1} \frac{2k!}{2^{2k}(k!)^2} \zeta^k, \qquad |\zeta| < 1$$

generalizada (Fórmula de Abel-Newton, veja Lista 3), observe que

$$\varphi(u,z) = 1 + \sum_{k \geqslant 1} \frac{2k!}{2^k (k!)^2} z^k \left(u - \frac{z}{2}\right)^k$$

Conclua que

$$P_n(u) = \sum_{r=0}^{m} \frac{(-1)^r(2n-2r)!}{2^n \cdot r!(n-r)!(n-2r)!}(u^{n-2r}), \tag{5}$$

$m = n/2$ se n é par e $m = (n-1)/2$ se n é ímpar

Em particular, confirme que $P_0(u) = 1, P_1(u) = u$, $P_2(u) = \frac{1}{2}(3u^2 - 1), P_3(u) = \frac{1}{2}(5u^3 - 3u)$.

ii) Levando em conta (5), deduza a *fórmula de Rodrigues*

$$P_n(u) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\, u^n}(u^2-1)^n \tag{6}$$

Observando que segue da *fórmula de Cauchy* que

$$P_n(u) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-u|=1} \frac{(w^2-1)^n}{2^n(w-u)^{n+1}}\,\mathrm{d}\, w \tag{7}$$

A fórmula (7) é conhecida como *fórmula de Schläfli.*

Segue diretamente da fórmula (7) que $w = P_n(u)$ é uma solução da equação de Legendre

$$(1-u^2)w'' - 2uw' + n(n+1)w = 0 \tag{8}$$

Tal equação é uma *equação diferencial singular-regular* linear *Fuchsiana* de segunda ordem. Veja ref. 20), mais detalhes sobre a teoria destas equações, que aparecem naturalmente tanto na Matemática, quanto na Física -Matemática.

iii) Mostre que os P_n verificam a *condição de ortogonalidade*

$$\int_{-1}^{1} P_m(u)P_n(u)\,\mathrm{d}u = 0 \tag{9}$$

se $m \neq n$. *Sugestão*: Use a equação diferencial (7) satisfeita por P_n e P_m para mostrar que

$$\left((1-x^2)(P_nP_m' - P_n'P_m)\right)' = \left(n(n+1) - m(m+1)\right)P_nP_m$$

Pode ser mostrado que os polinômios de Legendre P_n tem exatamente n distintos zeros reais no intervalo $(-1,1)$ e que satisfazem

$$\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1} \tag{10}$$

Logo, os polinômios de Legendre normalizados são dados por

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} P_k(x) \tag{11}$$

Nota cultural: No espaço $L^2(-\infty,\infty)$, um exemplo de sistema ortornormal completo é dado pelas funções de Hermite que são definidas em termos dos polinômios de Hermite. Os polinômios de Hermite são dados por

$$H(t) = (-1)^n \, \mathrm{e}^{t^2} \, \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\, t^n} \, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

Outro exemplo interessante, é fornecido pelos polinômios de Laguerre e pelas funções de Laguerre que determinam um sistema ortornormal completo em $L^2(0,\infty)$.

Aproximações polinomiais (I)

Seja X um espaço vetorial. ma aplicação $x \in X \mapsto N(x) = \|x\| \in \mathbb{R}$ é chamada de uma *semi-norma* (abuso de notação), se satisfaz as propriedades de uma norma, exceto que $\|x\| = 0$, não implica necessariamente que $x = 0$.

15) (*Exemplos de semi-normas*)
   a) (*semi-norma de Taylor*) Mostre que se se V e 'o espaço de todas as funções f possuindo n-ésima derivada em um certo ponto a; então

$$N(f) = \sum_{k=0}^{n} |f^{(k)}(a)|$$

é uma semi-norma.

b) Mostre que de X é o espaço vetorial de todas as funções reis integráveis f em $[a,b]$, então

$$N(f) = \int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x$$

é uma semi-norma que é proveniente de um produto interno

c) Mostre que se X é o espaço de todas as funções reais f limitadas em $[a,b]$, então

$$N(f) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$$

é uma semi-norma.

Pense agora que $\mathcal{C}$ é o espaço das funções contínuas definidas em $[a,b]$, e que $\mathcal{S}$ é um subespaço vetorial consistindo de todos os polinômios de grau $\leqslant n$. Assuma que exista uma determinada norma ou semi-norma $\|\|$ definida em $\mathcal{C}$. Seja fixada uma função $f \in \mathcal{C}$. Se existe um polinômio P em $\mathcal{S}$ tal que

$$\|f - P\| \leqslant \|f - Q\|$$

para todos os polinômios Q em $\mathcal{S}$, dizemos que P é a melhor aproximação de f relativa a dada norma ou semi-norma

16)

a) Mostre que o *polinômio de Taylor* de grau n é a melhor aproximação polinomial para a semi-norma de Taylor dada no exerc. 15)a).

b) Seja X um espaço vetorial dotado de um produto interno $<,>$. Note que o exerc. 9)f) diz que existe um único polinômio P em $\mathcal{S}$ tal que a norma $\|f - P\|$ é a menor possível. Mais precisamente, P é a projeção ortogonal em $\mathcal{S}$ dada explicitamente por

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} < P, e_i > e_i$$

onde $e_0, e_1, \ldots e_n$ é um conjunto ortonormal gerando $\mathcal{S}$. Mostre que os polinômios de Legendre normalizados $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n$ formam uma base ortornormal para o subespaço de todos os polinômios de grau$\leqslant n$ do espaço das funções contínuas em $[-1,1]$, dotado do produto interno (veja item 14) e equação 11))

$$
< f,g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \tag{12}
$$

c) Em particular mostre que o polinômio linear (grau 1) mais próximo da função $f(x) = \sin \pi x$ em $[-1,1]$ é $P(x) = \dfrac{3}{\pi}x$. Encontre o polinômio linear mais próximo de e^x em $[-1,1]$ (com o espaço das funções contínuas em $[-1,1]$ dotado do produto interno dado pela equação (12), é claro).

d) Seja $\mathcal{C}[0,2]$ o espaço das funções contínuas em $[0,2]$ dotado do produto interno

$$
< f,g >= \int_{0}^{2} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x
$$

Mostre que o polinômio constante mais próximo de $f(x) = \mathrm{e}^x$ é $P(x) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - 1)$. Calcule $\|P(x) - f(x)\|$.

e) Seja $\mathcal{C}[0,2\pi]$, o espaço das funções contínuas em $[0,2\pi]$ dotado do produto interno

$$
< f,g >= \int_{0}^{2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x
$$

Dada $f(x) = x$, encontre o polinômio trigonométrico no subespaço gerado pelas funções trigonométricas $u_0(x) = 1, u_1(x) = \cos x$ e $u_2(x) = \sin x$ mais próximo de f.

17) (*Fórmula de interpolação de Lagrange*) Dados $n+1$ números distintos e $n+1$ números $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ não necessariamente distintos, mostre que existe um único polinômio $P(x)$ de grau $\leqslant n$ satisfazendo $P(x_j) = f(x_j), \quad j = 0,1,2,\ldots,n$. Além disso mostre que $P(x)$ é dado por

$$
P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k) \prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}} (x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}} (x_k - x_j)}
$$

Nota (*erro na interpolação polinomial*): Sejam $x_0, x_1, \dots x_n$, $n+1$ pontos distintos num intervalo $[a,b]$ no qual uma certa função diferenciável f está definida. Seja P o polinômio de inmterpolação que coincide com f nestes pontos. Seja $x \in [a,b]$ e seja $[\alpha,\beta]$ um intervalo qualquer contido no domínio de definição de f contendo x e os pontos $x_0, x_1, \dots x_n$. Assuma que f seja $n+1$ vezes diferenciável em $[\alpha,\beta]$. Tem-se então que existe $c \in (\alpha,\beta)$ tal que

$$f(x) - P(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \tag{13}$$

A demonstração do fato acima está baseada na análise de uma nova função

$$F(t) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)(f(t)-P(t)) - (t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)(f(x)-P(x))$$

derivando-se $n+1$ vezes $F(t)$ se anula em x e nos pontos $x_0, x_1, \dots x_n$, totalizando $n+2$ pontos onde $F(t)$ se anula. Logo, segue do teorema de Rolle que $F'(t)$ se anula em $n+1$ intervalos, adjacentes, $F'(t)$ se anula em n pontos distintos,; assim por diante, mostrando que $F^{(n+1)}(c) = 0$, para algum $c \in (\alpha,\beta)$. Isto acarreta na fórmula (13) acima. O leitor deve examinar o erro na interpolação linear. Existe também uma *fórmula de interpolação de Newton*. O leitor interessado pode consultar a ref. 19).

18) (*Polinômios de Tchebyshev*) Os polinômios de Tchebyshev $T_n(x)$ são definidos pela fórmula

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \qquad \forall x \in [-1,1] \tag{14}$$

Alternativamente

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} x^{n-2k}(x^2-1)^k$$

Você saberia demonstrar isto ?

a) Mostre que os polinômios de Tchebyshev satisfazem a seguinte fórmula de recorrência

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \qquad n \geqslant 1$$

$T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$. Além disso mostre que os coeficientes dos polinômios de Tchebyshev $T_n(x)$ são inteiros e que o coeficiente de x^n em $T_n(x)$ é 2^{n-1}. Calcule os 5 primeiros polinômios de Tchebyshev.

b) Mostre que para $n \geqslant 1$ os zeros de $T_n(x)$ são os pontos

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n_1$$

Conclua que

$$T_n(x) = 2^{n-1}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

c) Mostre que os polinômios de Tchebyshev satisfazem a seguinte equação diferencial linear de segunda ordem singular-regular (veja ref.20))

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$$

i) Mostre que os $T_n(x)$ satisfazem

$$T_m(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\sqrt{1-x^2}\,T_n'(x)\right) + n^2\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

deduza a seguinte relação de ortogonalidade

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \pi & \text{se } n = m = 0 \\ \pi/2 & \text{se } n = m > 0 \end{cases}$$

Nota: possível mostrar que os polinômios de Tchebyshev $T_n(x)/2^{n-1}$ normalizados no intervalo $[-1, 1]$ realizam a menor norma do sup entre os polinômios normalizados no intervalos $[-1, 1]$. Mais precisamente, se $p_n(x) = x^n + \cdots a_0$, é um polinômio normalizado qualquer de grau $n \geqslant 1$, então

$$\|p_n\|_{\sup} \geqslant \|T_n(x)/2^{n-1}\|_{\sup} \tag{15}$$

Além disso, a igualdade em (15) é válida, se $p_n = T_n(x)/2^{n-1}$.

Nota: Os polinômios de Tchebyshev aparecem na *Dinâmica Complexa*, veja por exemplo refs. 1) e 21). Seja $P(z)$ um polinômio (ou mais geralmente uma fração racional; ou seja um quociente de polinômios). Seja $z_0 \in \mathbb{C}$, e considere as iterações $z_0, z_1 = P(z_0), z_2 = P(z_1), \ldots$. O *conjunto de Fatou*, denotado por F é o subconjunto do plano complexo $\mathbb{C}$ para o qual vale a seguinte propriedade: Se $x_0 \in F$, então para todo w_0 suficientemente próximo de x_0 as duas seqüências de iterados z_n e w_n iniciando em z_0 e w_0, respectivamente, exibem *grosso modo* o mesmo comportamento quando n tende a ∞. O conjunto de Julia, denotado por J é o complementar de F. Considerando os polinômios de Tchebyshe $T_n(z)$ e seus iterados $(T_n)^k$ é possível mostrar que $J = [-1, 1]$ e que $F = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Funções semi-contínuas

Seja X um espaço métrico. Seja $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Vamos ver primeiro a definição de funções semi-contínuas superiormente. Dizemos que φ é *semi-contínua superiormente* (denotamos *scs*), se para cada $a \in X$, temos que

$$\limsup_{x \to a} \varphi(x) \leqslant \varphi(a)$$

Ou seja, $\forall \epsilon > 0, \exists$ vizinhança U de a em X tal que $\varphi(x) \leqslant \varphi(a) + \epsilon, \quad \forall x \in U$, se $\varphi(a) > -\infty$. Se $\varphi(a) = -\infty$, a condição é que $\forall A > 0, \exists$ vizinhança U de a, tal que $\varphi(x) < -A, \quad \forall x \in U$.

Por outro lado, Dizemos que $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é *semi-contínua inferiormente* (denotamos *sci*), se para cada $a \in X$, temos que

$$\liminf_{x \to a} \varphi(x) \geqslant \varphi(a)$$

Ou seja, $\forall \epsilon > 0, \exists$ vizinhança U de a em X tal que $\varphi(x) \geqslant \varphi(a) - \epsilon, \quad \forall x \in U$, se $\varphi(a) < \infty$. Se $\varphi(a) = \infty$, a condição é que $\forall A > 0, \exists$ vizinhança U de a, tal que $\varphi(x) > A, \quad \forall x \in U$.

19) Mostre que se φ é *scs*, então φ é limitada em qualquer compacto $K \subset X$ e f assume o máximo em K.
20) Mostre que se φ é *scs*, então o conjunto $\{x; \quad \varphi(x) = M\}$ é fechado em X.
21) Mostre que se φ_1 e φ_2 são funções semi-contínuas superiormente, então, se $\lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \geqslant 0$, as funções $x \mapsto \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$, $x \mapsto \max(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ e $\lambda\varphi_1(x)$ são *scs*.
22) Se $\{\varphi_n\}$ é uma seqüência de funções *scs* no espaço métrico X, assumindo que $\varphi_{n+1}(x) \leqslant \varphi_n(x)$, mostre que $\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x)$ é ainda *scs*.

23) (*caracterização das funções sci*) Mostre que $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, é *sci* se e somente se $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\{x; \quad \varphi(x) \leqslant \lambda\}$$

é fechado em X.

24) Mostre que toda função *sci* definida num espaço métrico compacto X assume o mínimo em X.

25) Mostre que se φ é *scs*, então $-f$ é *sci*.

26) Mostre que φ é contínua, se e somente se φ é *scs* e *sci*.

BIBLIOGRAFIA SUCINTA

1) Alan F. Beardon. *Iteration of Rational Functions*. Springer, 1991.

2) Augus E. Taylor. *Introduction to Functional Analysis*. John Wiley and Sons, Inc, 1958.

3) Elon Lages Lima. *Curso de Análise Volume 1*. Projeto Euclides, 1995.

4) Elon Lages Lima. *Elementos de Topologia Geral*. Projeto Euclides, 1970.

5) Elon Lages Lima. *Espaços Métricos*. Projeto Euclides, 1993.

6) Haïm Brezis. *Analyse Fonctionnelle*. Masson, 1983.

7) Henri Mascart e Marius Stoka. *Fonctions d'une Variable Réele*. PUF, 1986.

8) G. H. Hardy, J. E. Littlewood e G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge Press , 1973.

9) John B. Conway. *Functions of One Complex Varialbles I* (second edition). Springer, 1978.

10) J. Rivaud. *Séries; équations différentielles*. Vuibert, 1973.

11) M. Spivak, *Calculus*. Dois volumes. Ed. Reverté, Barcelona, 1970.

12) Raghavan Narasimhan e Yves Nievergelt. *Complex Analysis in One Variable* (second edition). Birkhäuser, 2001.

13) Ralph P. Boas, Jr. *A Primer of Real Functions*. Math. Assoc. of Amer. John Wiley and Sons, Inc. 1960.

14) Reinhold Remmert. *Theory of complex functions.* Springer, 1991 (*Readinds in Mathematics*). *Classical topics in complex function theory*, Springer, 1998.

15) Robert E. Greene e Steven G. Krantz. *Function Theory of One Complex Variable.* J. Wiley & Sons, 1997.

16) Walter Rudin. *Princípios de Análise Matemática.* Livro Técnico, N, 1971.

17) Walter Rudin. *Real and Complex Analysis* (third edition). McGraw-Hill, 1987.

18) Srishti D. Chatterji. *Cours d'Analyse 1,2.* Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1997.

19) Tom M. Apostol. *Calculus, vol. II* (second edition). J. Wiley & Sons, 1969.

20) William E. Boyce e Richard C. DiPrima. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.* Sétima edição, Livros Técnicos e Científicos Editora, 2002.

21) W. de Melo. *Ferramentas Matemáticas em Dinâmica Unidimensional.* Matemática Universitária, No 29, 75-113, 2000.