LISTA 5 DE ANÁLISE REAL 2010

RICARDO SA EARP

Séries de potências, séries de Taylor e analiticidade

(1) Determine o raio de convergência das séries de potências, determinando o disco de convergência. Calcule $f^n(0)$. Determine um domínio compacto em que a série converge normalmente.
   (a) $\sum_n n^\alpha z^n, \ \alpha \in \mathbb{R}$.
   (b) $\sum_n n!(z/n)^n$.
   (c) $\sum_n \alpha^{n^2} z^n, \ \alpha \in \mathbb{C}$.
   (d) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n!}\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)z^n, \ \alpha \in \mathbb{C}; \sum_n \frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)z^n, \ \alpha \in \mathbb{C}.$
   Sugestão: Considere o caso $\alpha \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,\}$ *separadamente.*
   (e) $\sum_n (\log n)^2 z^n$. *Resposta*: 1.
   (f) $\sum_n n!/(n^n) z^n$.
   Sugestão: Considere a fórmula de Stirling $n! = n^n \mathrm{e}^{-n} u_n$ com $\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} = 1$. *Resposta*: e
   (g) $\sum_n z^{2^n}/(n!)$.

(2) Sejam a, b, c números complexos. Suponha que c não é um inteiro $\leqslant 0$. Mostre que o raio de convergência da série abaixo é 1, disco de convergência. Determine um domínio compacto em que a série converge normalmente.

$$1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)\cdot b(b+1)}{2!c(c+1)}z^2 + \cdots$$
$$+ \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)\cdot b(b+1)\dots(b+n-1)}{n!c(c+1)\dots(c+n-1)}z^n + \cdots$$

(3) Mostre que as séries de números complexas abaixo, convergem nos conjuntos $\mathcal{C}$ dados
   (a) $\displaystyle\sum_n (z/(1+z))^n$. $\mathcal{C} = \{z; \Re z > -1/2\}$. Determine um domínio compacto em que a série converge normalmente.
   Sugestão: Você terá que mostrar que $z \mapsto \dfrac{z}{1+z}$ leva o semi-plano $\{z; \Re z > -1/2\}$ no disco unitário centrado na origem.

(b) $\sum_n z^n/(1+z^n)$. $\mathcal{C} = \{z; |z| < 1\}$.

(c) $\sum \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^n$. $\mathcal{C} = \{z, \quad \Re z > 0\}$. *Sugestão*: Veja a sugestão para o item a).

(d) Discuta a *convergência normal* das séries dos itens anteriores.

(4) Seja R o raio de convergência da série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. Mostre que o raio de convergência $\widetilde{R}$ da série

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{1+|a_n|} z^n$$

é dado por $\widetilde{R} = \max(R, 1)$

(5) Determine os raios de convergência das séries. Calcule $f^{(n)}(0)$. Indique um domínio compacto no qual a série converge normalmente:

(a) $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n 2^n z^{2n+2}$.

(b) $\sum_{n\geqslant 0} 2^{\log n} z^n$.

(c) $\sum_{n\geqslant 0}(\sin n) z^n$.

(6) Seja $\sum_n^{\infty} a_n z^n$ uma série que é absolutamente convergente no disco $|z| < R$ e é divergente para $|z| > R$.

(a) Deduza que se $\limsup_{n\to\infty} |a_n| < \infty$ então $R \geqslant 1$.

(b) Deduza que se $\liminf_{n\to\infty} |a_n| \geqslant \alpha > 0$ e $\limsup_{n\to\infty} |a_n| < \infty$ então $R = 1$.

(7) Discuta sobre o raio de convergência das séries $\sum a_n z^n$, onde os coeficientes a_n estão dados abaixo.

(a) Sejam $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$ duas seqüências de números reais. Seja $\delta > 0$. Assuma que $(\sin\alpha_1 + \cdots \sin\alpha_n)^2 + (\cos\beta_1 + \cdots + \cos\beta_n)^2 \geqslant \delta$. Defina: $a_n := (\sin\alpha_1 + \cdots \sin\alpha_n)^2 + (\cos\beta_1 + \cdots + \cos\beta_n)^2$, onde os α_i e os β_j são reais. *Sugestão*: Faça a comparação das médias geométricas e aritméticas de uma certa maneira ou utilize a desigualdade de Cauchy, mostrando que $(\sin\alpha_1 + \cdots \sin\alpha_n)^2 + (\cos\beta_1 + \cdots + \cos\beta_n)^2 \leqslant n$.

(b) $a_n = \dfrac{1^k}{n^{k+1}+1} + \cdots + \dfrac{n^k}{n^{k+1}+n}, \quad k > 0$. *Sugestão*: Compare com a soma de Riemann da função $f(x) = x^k, x \in [0,1]$, observando que

$$\frac{1^k + \cdots + n^k}{n^{k+1} + n} \leqslant a_n \leqslant \frac{1^k + \cdots + n^k}{n^{k+1} + 1}.$$

(8) Neste exercício você precisará fazer uso de certas *desigualdades clássicas*. Sejam $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$ duas seqüência de números reais positivos satisfazendo certas condições. Considere a série de potências

$$f(z) = \sum a_n z^n$$

Discuta o raio de convergência da série sabendo que a_n, α_n, β_n satisfazem às seguintes condições abaixo.

(a) $a_n := \dfrac{(\alpha_n + \beta_n)^{\alpha_n + \beta_n}}{2^{(\alpha_n + \beta_n)}}$, onde

$$\alpha_n^{\alpha_n} \beta_n^{\beta_n} = O(2^n) \qquad (n \to \infty)$$

Sugestão: Use a desigualdade de Young para estimar a_n.

(b) $a_{n+1} := \alpha_{n+1} \beta_{n+1}^n$, onde

$$\frac{\alpha_{n+1} + n\beta_{n+1}}{n+1} = O(1) \qquad (n \to \infty)$$

Aqui você precisa comparar as quantidades $\dfrac{\alpha_{n+1} + n\beta_{n+1}}{n+1}$ e $\alpha_{n+1}\beta_{n+1}^n$ via a desigualdade da média,

(9) Seja $\{a_n, \quad n = 2, 3, \ldots\}$ uma seqüência de números complexos não nulos satisfazendo

$$(*) \qquad \sum_2^{\infty} n|a_n| < 1$$

(a) Discuta sobre o disco de convergência da série

$$(**) \qquad z + \sum_2^{\infty} ((n-1))^n (\ln 2) a_2 (\ln 3) a_3 \cdots (\ln n) a_n z^n$$

Você precisa usar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, levando em conta $(**)$.

(b) Agora suponha $\operatorname{Re} a_n > 0, \quad n = 2, 3, \ldots$. Discuta, *com todos os detalhes*, o raio de convergência da série

$$\sum_2^{\infty} \frac{a_n^{2^n}}{1 + n\, a_n} z^{n\, 2^n}$$

Aqui você terá que observar que a série apresenta "gaps" e tome cuidado com potenciação para aplicar o critério de Cauchy (raiz).

(c) Dê exemplos de tais a_n satisfazendo $(*)$ e assim exemplos de séries satisfazendo o item i).

(10) Seja $\{a_n\}$ uma seqüência dada por $a_n = 1$, se $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$ e $a_n = 0, n \neq 2^k$. Seja $m > 0$. Discuta com detalhes o raio de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \, \mathrm{e}^{mn} \, z^n$$

Novamente você terá que observar que a série apresenta "gaps" e tome cuidado com potenciação para aplicar o critério de Cauchy (raiz).

(11) Seja $a = \alpha + i\tau, \alpha, \tau \in \mathbb{R}, \tau > 0$. Considere a série

$$f(z) = \sum_n \log n \, a^n z^{n^2}$$

Determine o raio de convergência e o disco de convergência. Calcule $f^{(n)}(0)$.

(12) Seja $f(z) = 1/z(z-1), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Obtenha o desenvolvimento de $f(z)$ em $z = 2$, usando a seguinte técnica

$$\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}\Big(1 + \frac{z-2}{2}\Big)^{-1} + (1 + (z-2)) \\
&= -\frac{1}{2}\Big\{1 - \frac{z-2}{2} + \left(\frac{z-2}{2}\right)^2 - \cdots\Big\} + \big\{1 - (z-2) + (z-2)^2 - \cdots\big\} \\
&= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} - 1\right)(z-2) + \cdots + \Big(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{2^n} + (-1)^n\Big)(z-2)^n + \cdots \\
&= \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)(z-2)^n
\end{aligned}$$

Qual é o raio de convergência da série acima ? Discuta isto!

(13) Considere a função

$$f(z) = \frac{1}{1 + z + z^2} \tag{$*$}$$

Seja $\sum a_n z^n$ o desenvolvimento de Taylor de $f(z)$ na origem.

(a) Mostre que os coeficientes a_n satisfazem uma relação de recorrência que dá a seguinte equação de diferenças linear de primeira ordem:

$$a_{n+1} + a_n + a_{n-1} = 0, \quad a_0 = 1, a_1 = -1$$

(b) Calcule a_n, mostrando que

$$a_n = \frac{i}{\sqrt{3}}\, e^{\pi i(2n-1)/3} - \frac{i}{\sqrt{3}}\, e^{-\pi i(2n-1)/3}$$

(c) Calcule $f^{(n)}(0)$, a derivada de ordem n de $f(z)$ na origem.
(d) Determine o desenvolvimento de Taylor de f na origem, verificando que a função racional $(*)$ acima dá a *forma fechada* de tal desenvolvimento, verificando o seu resultado.
(e) Calcule o raio de convergência da série de Taylor.
(f) Mostre que $f(z)$ satisfaz uma equação diferencial de segunda ordem (envolvendo $f(z), f'(z), f''(z)$) não linear.

(14) Sejam a, b, k constantes reais, com $k \neq 0$. Define-se uma seqüência $\{a_n\}$ pela relação de recorrência (equação de diferenças linear de segunda ordem):

$$a_0 = a, \quad a_1 = b, \quad ka_{n+2} - (1+k^2)a_{n+1} + ka_n = 0$$

Considere a série

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n \frac{z^n}{n!}$$

(a) Mostre que $f(z)$ satisfaz a uma equação diferencial linear de segunda ordem. Encontre uma *expressão explícita para* $f(z)$ e em seguida encontre uma expressão para os a_n. Analise os casos $k = \pm 1$, separadamente.

(15) Responda verdadeiro ou falso. Caso verdadeiro esboce uma dedução rigorosa. Caso falso esboce um contra-exemplo detalhadamente.
(a) Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa definida num domínio Ω. Seja $c_n, \quad n = 0, 1, 2 \ldots,$ uma seqüência de pontos de Ω com $c_n \to c \quad (n \to \infty)$. Assuma que $f(c_n) = 0$. Segue então que $f \equiv 0$ em Ω.
(b) Suponha que $0 \in \Omega$ e que $f(z)$ e $g(z)$ são duas funções holomorfas em Ω com $f(z)$ não se anulando na sequência $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ e $g(z)$ não se anulando em $z = 0$; então se $f(z)$ e $g(z)$ satisfazem $\dfrac{f'(a_n)}{f(a_n)} = \dfrac{g'(a_n)}{g(a_n)}$; segue que existe uma relação funcional simples entre $f(z)$ e $g(z)$. Determine tal relação.
(c) Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função anti-holomorfa definida num domínio Ω. Seja $c_n, \quad n = 0, 1, 2 \ldots,$ uma seqüência

de pontos de Ω que possui um ponto de acumulação pertencendo ao domínio Ω. Assuma que $f(c_n) = 0$. Segue então que $f \equiv 0$ em Ω.

(d) Existem funções holomorfas definidas num domínio contendo a origem que satisfaçam a condição abaixo: $f(\frac{1}{n^2}) = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$, onde $n \in \mathbb{N}^*$.

(e) Se f e g são duas funções holomorfas definidas em Ω satisfazendo $f(z)g(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$, então $f(z) \equiv 0$ ou $g(z) \equiv 0$ em Ω.

(f) Seja $\{a_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência limitada. Segue então que o raio de convergência da série $\displaystyle\sum_0^\infty a_n(z-c)^n$ é igual a 1.

(g) Se a série $\displaystyle\sum_0^\infty a_n(z-c)^n$, tem raio de convergência $R > 0$ e $a_n \to 0 \quad (n \to \infty)$; então $\displaystyle\sum_0^\infty |a_n| R^n < \infty$.

(h) Se a série $\displaystyle\sum_0^\infty a_n(z-c)^n$ é uma série de raio de convergência R, então Se $\sup_n |a_n| < \infty$, mas $a_n \not\to 0\, (n \to \infty)$, então $R = 1$.

(i) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, implica que $f(z) = \dfrac{z}{z+1}$.

(j) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n^2 \sin(\pi/n)}{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, implica que $f(z) = \sin(\pi z)/z(z+1)$, com $f(0) = \pi$.