

LISTA 5 DE ANÁLISE REAL 2011

RICARDO SA EARP

Limites e continuidade em espaços métricos

- (1) RESPONDA VERDADEIRO OU FALSO. CASO VERDADEIRO ESBOCE UMA DEDUÇÃO SUCINTA CORRETA E EXIBA UM EXEMPLO QUE ILUSTRE A AFIRMAÇÃO, SE FOR O CASO. CASO FALSO, EXPLICA A FALSIDADE OU EXIBA UM CONTRAEXEMPLO, CONFORME A SITUAÇÃO. JUSTIFIQUE A SUA RESPOSTA
- (a) Sejam $f, g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ duas funções contínuas, satisfazendo $f(0) = 1$ e $g(0) = 2$. Assuma que $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ e que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3/2$. Segue que existe $x_0 > 0$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$. Além disso, deduza que se $f(x)$ é estritamente crescente e $g(x)$ é estritamente decrescente este x_0 é único.
- (b) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ contínua tal que $f(0) = 1/2$ e $f(x) \rightarrow 1$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$. Segue então que f assume um mínimo global positivo m satisfazendo $m \leq 1/2$. Além disso, o máximo global não é atingido.
- (c) Sejam f, g funções contínuas que levam um espaço métrico X na reta real \mathbb{R} . Se $f(a) \neq 0 \neq g(a)$, para certo $a \in X$, segue então que $f(x) \cdot g(x) \neq 0$, numa vizinhança de a .
- (d) Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^0 satisfazendo,
- (i) $f(0, 0) = 2$.
- (ii) $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} f(x, y) = 1$.

Segue então que f assume um máximo global ≥ 2 , mas o mínimo global pode ser atingido ou não.

- (2) Seja $f(x) = v \cdot x$, onde \cdot denota o produto escalar em \mathbb{R}^n , e $v \in \mathbb{R}^n$ é um vetor fixado. Discuta a continuidade de $f(x)$. Mostre que os semi-planos dados pelas equações

$$\{x; v \cdot x > \alpha\} \quad \text{e} \quad \{x; v \cdot x \geq \alpha\}$$

são subconjuntos abertos e fechados, respectivamente. Deduzir que o hiperplano $\{x; v \cdot x = \alpha\}$, é um subconjunto fechado de \mathbb{R}^n .

- (3) Dê uma caracterização de continuidade de uma função f que leva um espaço métrico X num espaço métrico Y em termos de seqüências.
- (4) Mostre que se f, g são funções contínuas que levam um espaço métrico X em \mathbb{R}^n , então se $f(a) \neq g(a)$, para certo $a \in X$, segue-se que $f(x) \neq g(x)$, numa vizinhança de a .
- (5) Dizemos que uma aplicação f que leva um espaço métrico X num espaço métrico Y é *aberta* (resp. *fechada*), se a imagem por f de um aberto de X (resp. fechado) é um aberto de Y (resp. fechado).
 - (a) Dê exemplos de aplicações contínuas reais definidas em subconjuntos do espaço Euclideano que sejam abertas, mas não sejam fechadas.
 - (b) Dê exemplos de aplicações contínuas definidas de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n que não sejam abertas nem fechadas.
 - (c) Dê exemplos de aplicações contínuas f definidas num intervalo I da reta em \mathbb{R}^2 que sejam injetivas mas não produzem um homeomorfismo entre I e sua imagem $f(I)$.
 - (d) Sejam X_1 e Y_1 subconjuntos de X e Y , respectivamente. Seja $f : X_1 \rightarrow X_2$ uma função contínua bijetiva tal que para todo aberto A de X (com a topologia induzida), $f(A)$ é um aberto de Y_1 (com a topologia induzida). Mostre que f é um homeomorfismo.
- (6) Dê exemplos de funções definidas numa vizinhança perfurada da origem de \mathbb{R}^2 que admitem um mesmo limite quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, ao longo de raios que chegam a origem $(0, 0)$ de \mathbb{R}^2 , mas que não admitam uma extensão contínua à origem.
- (7) Responda verdadeiro ou falso. Caso verdadeiro, deduza, caso falso dê um contraexemplo. Lembro que uma propriedade importante de funções contínuas é o seguinte: Um função contínua num espaço compacto assume o máximo e o mínimo.
 - (a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
 - (b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
 - (c) Se A e B são fechados disjuntos tal que $\forall p \in B, \text{dist}(p, A) > 0$, então $\text{dist}(A, B) > 0$.
 - (d) Dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função considere o gráfico de f dado por $A = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$. Segue então que se o gráfico de f é fechado, f é contínua.

- (e) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ contínua tal que $f(0) = 1/2$ e $f(x) \rightarrow 1$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$. Segue então que f é limitada e assume um máximo global.
- (f) Seja X um subconjunto de \mathbb{R}^n e seja $a \in \overline{X}$ um valor aderente a X . Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua limitada. Segue então que existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
- (g) Sejam f, g funções contínuas que levam um espaço métrico X na reta real \mathbb{R} . Se $f(a) \neq 0 \neq g(a)$, para certo $a \in X$, segue então que $f(x) \cdot g(x) \neq 0$, numa vizinhança de a .
- (8) Exiba um homeomorfismo entre o intervalo $(-1, 1)$ e a reta real \mathbb{R} .
- (9) Considere a esfera unitária $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Seja $N = (0, 0, 1)$ o polo norte da esfera. Para cada $p \in \mathbb{S}^2, p \neq N$, trace a reta r passando por N e p . Seja $f(p)$ o ponto que r corta ou perfura o plano horizontal $\{z = 0\}$. Deduza que a aplicação $p \mapsto f(p)$ é um homeomorfismo, que leva $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ homeomorficamente a \mathbb{R}^2 .
- (10) Considere o disco unitário aberto $\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ e o plano complexo \mathbb{C} . Deduza que \mathcal{D} e \mathbb{C} são homeomorfos.
- (11) Deduza as afirmações abaixo:
- (a) Seja A um conjunto limitado não compacto de \mathbb{R} . Segue então que existe uma função contínua $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ que não é limitada e existe $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ limitada, mas o $\sup_x f(x)$ não é atingido.
- (b) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ contínua tal que $f(x) \rightarrow 0$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$. Segue então que f assume um máximo global.
- (c) Todo conjunto infinito limitado de \mathbb{R}^n possui um ponto de acumulação.
- (d) Toda sequência limitada de \mathbb{R}^n possui um valor aderente.
- (e) Seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada em \mathbb{R}^N tal que toda subsequência converge para o mesmo ponto a de \mathbb{R}^N . Segue então que $x_n \rightarrow a$, quando $n \rightarrow \infty$.
- (12) Seja (X, d) um espaço métrico. Deduza que dado $x_0 \in X$, a função distância $d(x_0, x) := \text{dist}(x_0, x)$ é uma função contínua de $x \in X$. Deduza que $d(x, y)$ é uma função contínua de ambos x e y .
- (13) Deduza que num espaço métrico X um conjunto F é fechado se e só se para toda sequência x_n convergente de pontos de F , convergindo a $x \in X$, então $x \in F$.

- (14) Seja X um espaço métrico e seja $S \subset X$ conjunto. Dizemos que um ponto $x \in X$ é um *ponto de acumulação* do conjunto S , se cada vizinhança de x (i.e aberto que contém x), contém um ponto de S diferente de x .

Deduza que x é um ponto de acumulação de S , se e só se existe uma sequência convergente $\{x_n\}$ de pontos distintos de S que tem x como limite.

- (15) Seja X um espaço métrico completo. Dizemos que um conjunto $S \subset X$ tem diâmetro finito se a função $d : S \times S \rightarrow \text{dist}(x, y)$ é limitada para todo $x, y \in S$. Denotamos o $\sup\{d(x, y), x, y \in S\}$ por $\text{diam}(S)$, chamado de diâmetro de S .

(a) Se $S \subset X$, deduza que $\text{diam}(S) = \text{diam}(\overline{S})$.

(b) Suponha que $X = \mathbb{R}^n$. Suponha que $\{S_n\}$ é uma sequência de conjuntos fechados limitados, não vazios tal que $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \cdots$. Suponha que o diâmetro $\text{diam}(S_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Deduza que a interseção $\cap S_n$ de todos os conjuntos S_n não é vazia.

Dê um contraexemplo, se a hipótese $\text{diam}(S_n) \rightarrow 0$, não é satisfeita.

- (16) Seja X um subconjunto de um espaço métrico Z . Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, uma aplicação uniformemente contínua. Deduza que se a é um valor aderente a $X \subset Z$ (imagine X contido num espaço métrico ambiente Z , digamos $Z = \mathbb{R}^n$), então limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, existe. Conclua que toda aplicação uniformemente contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, admite uma única extensão contínua $F : \overline{X} \rightarrow \mathbb{R}$, que é além disso uniformemente contínua.