ANÁLISE REAL-2002.2–Lista 6

Professor: Ricardo Sá Earp

Diferenciabilidade e Integração, I

1) Queremos obter uma aproximação de $\sqrt[3]{23}$ com um algarismo decimal correto: considerte a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$, restrita ao intervalo $[23, 27]$. Aplique o teorema do valor médio neste intervalo para obter que

$$2.81 < \sqrt[3]{23} < 2.86$$

Você saberia obter uma aproximação com 4 algarismos decimais corretos, usando a fórmula de Taylor: $\sqrt[3]{23} = 2.8438\ldots$?

2) Mostre para qualquer que seja o valor k, que a equação

$$x^3 + x^2 - 5x + k = 0$$

nunca terá dois zeros no intervalo $(0, 1)$.

3) Assuma que $\arctan \pi/4 \approx 0.7854$, aplicando obrigatoriamente o teorema do valor médio, mostre que

$$\arctan 9/8 = 0.844 \pm 0.004$$

4) Considere a função $f(x) = (a^2 + x)^{1/2}$. Seja $b > 0$. Utilizando o teorema do valor médio, mostre que

$$(a^2 + x)^{1/2} < |a| + \frac{b}{2|a|}, \qquad \forall x \in (0, b)$$

Deduza que

$$f(b) > |a| + \frac{b}{2\left(|a| + \dfrac{b}{2|a|}\right)}$$

Concluq que se $a > 0$ e $b > 0$, então

$$a + \frac{ab}{2a^2 + b} < (a^2 + b)^{1/2} < a + \frac{b}{2a}$$

Obtenha que

$$3\frac{3}{10} < \sqrt{11} < 3\frac{1}{3}$$

5) Vamos agora examinar de um outro ponto de vista as identidades

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \qquad \ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

que já sabíamos deduzir via as séries de Tayor de $\arctan z$ e $\ln(1+z)$, na origem; formalize esta afirmação!! Considere a integral

$$I(n) = \int_0^{\pi/4} \tan^n \theta \, \mathrm{d}\theta \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

a) Fazendo integração por partes mostre que

$$\begin{aligned}
I(2n) &= \int_0^{\pi/4} \tan^{2n-2}\theta \, (\sec^2 \theta - 1) \, \mathrm{d}\theta \\
&= -I(2n-2) + \int_0^{\pi/4} \tan^{2n-2}\theta \sec^2 \theta \, \mathrm{d}\theta \\
&= -I(2n-2) + \frac{1}{2n-1} \\
&= \frac{1}{2n-1} - \left(-I(2n-4) + \frac{1}{2n-3} \right) \\
&\ldots \\
&= \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-5} - + \cdots + (-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

deduzindo que

$$\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \right| = I(2n) \tag{1}$$

analogamente, mostre que

$$\left|\frac{1}{2}\ln 2 - \sum_{1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k}\right| = I(2n+1) \tag{2}$$

b) Mostre que $I(n)$ decresce estritamente quando n cresce, concluindo que

$$I(n) < \frac{1}{2(n-1)} \qquad I(n-2) > \frac{1}{2(n-1)}$$

portanto

$$\frac{1}{2(n+1)} < I(n) < \frac{1}{2(n-1)}$$

c) Aplique o resultado acima nas equações (1) e (2) para obter as estimativas

$$\frac{1}{2(2n+1)} < \left|\frac{\pi}{4} - \sum_{1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\right| < \frac{1}{2(2n-1)}$$

$$\frac{1}{2(n+1)} < \left|\ln 2 - \sum_{1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| < \frac{1}{2n}$$

Nota: Um análise parecida, considerando a integral

$$J(n) = \int_{0}^{\pi/2} \sin^n\theta \, d\theta$$

leva a seguinte estimativa obtida por J. Wallis no séc. 17:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{2})}} < \frac{1.3\cdots(2n-1)}{2.4\cdots 2n} < \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

6) Aplique obrigatoriamente a fórmula de Taylor de ordem 4 para $\sin x$ em $a = 0$, para mostrar que

$$x - \frac{x^3}{3!} < \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}, \qquad \forall x \in [1, 2]$$

Deduza que a integral $I = \int\limits_1^2 \sqrt{x}\sin x \,\mathrm{d}x$, pode ser estimada por

$$\frac{2^3\cdot 17\sqrt{2}-49}{3^3\cdot 5} < I \leqslant \frac{2^3\cdot 17\sqrt{2}-49}{3^3\cdot 5} + \frac{2}{11\cdot 4!}(2^{11/2}-1)$$

7) O desafio agora é estimar $K(1/4)$, com precisão de 4 casa decimais, onde

$$K(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

é uma *intergal elíptica completa de primeira espécie.* A sugestão é considerar a fórmula de Taylor de ordem 2 da função $f(x) = (1-x)^{-1/2}$, em $a = 0$, para $0 < x < \frac{1}{16}$. Mostre que $K(1/4) = 1.5962\ldots$

8) Exiba exemplos de funções reais que sejam de classe C^k, mas não sejam de classe C^{k+1}.

9) Seja $f(x) \geqslant 0$ uma função suave definida em $[0,\infty)$, Assuma que $f(x) > 0$, para $x > 0$. Assuma que $\lim x^2 \log f(x) \to -1$, quando $x \to 0^+$. Mostre que $f(x)$, assim como todas as suas derivadas são nulas na origem.

10) Seja f uma função contínua no intervalo $[0,\infty)$. Para $x > 0$, colocamos

$$\varphi(x) = \int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad F(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$$

a) Mostre que $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = f(0) := F(0)$.

b) Mostre que $F(x)$ é diferenciável e que $F'(0) = \dfrac{f'(0)}{2}$.

11) Seja f uma função real definida num intervalo I de comprimento $2l$. Assuma que f é duas vezes diferenciável em I. Além disso, suponha que f e f'' sejam limitadas. Seja $M_0 = \sup\limits_{x\in I}|f(x)|$ e $M_2 = \sup\limits_{x\in I}|f''(x)|$.

a) Seja x_0 um ponto interior de I e seja λ um número real positivo tal que o intervalo $J = J(x_0,\lambda) = [x_0-\lambda, x_0+\lambda]$ seja contido no interior de I. Mostre que

$$|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{\lambda} + \lambda M_2, \qquad \forall x \in J$$

b) Mostre que se $0 < \lambda < l$, pode-se encontrar x_0 no interior de I tal que a desigualdade acima seja válida para todo $x \in I$. Além disso, mostre que se f' é limitada em I, tem-se que

$$\sup_{x\in I} |f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{\lambda} + \lambda M_2, \qquad \forall \lambda \in (0,l)$$

Conclua que se $l > \sqrt{\dfrac{M_0}{M_1}}$, tem-se que $M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_1}$. Estude o caso $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{2}$ no intervalo $[-1,1]$.

12) Seja $y = f(x)$ uma função positiva, crescente, duas vezes diferenciável no intervalo (x_0, x_1). Suponha que para certo $A > 0$, y satisfaça a desigualdade diferencial

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \leqslant \frac{1}{y(1+y'^2)^{1/2}} + \frac{A}{y^2(1+y'^2)}$$

a) Mostre que a função

$$\frac{1}{2}\log(1+y'^2) - \log y + \frac{A}{y}$$

é decrescente em (x_0, x_1). Deduza que existem constantes $b > 0$ e c tal que

$$y(x) < c\,\mathrm{e}^{bx}$$

13) Seja $y = f(x)$ uma função positiva, crescente, estritamente convexa, duas vezes diferenciável num intervalo $(0, x_1)$. Suponha que para certo $0 < a < 1$, y satisfaça a desigualdade diferencial

$$\frac{y''}{2(1+y'^2)^{3/2}} - \frac{1}{2y(1+y'^2)^{1/2}} = a\left(\frac{y''}{2(1+y'^2)^{3/2}} + \frac{1}{2y(1+y'^2)^{1/2}}\right)$$

a) Mostre que a equação acima é equivalente a

$$\frac{y''y'}{1+y'^2} = \alpha\frac{y'}{y}, \qquad \alpha = \frac{1+a}{1-a}$$

b) Fazendo uma integração mostre que

$$\log\left(\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y^\alpha}\right) = \text{const} = c$$

Deduza que

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\mathrm{e}^{2c}\, y^{2\alpha} - 1}} = x + d, \quad d \in \mathbb{R}$$

Considerando uma primitiva qualquer $I(y)$ de $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2c}\, y^{2\alpha} - 1}}$, mostre que tal é limitada quando $y \to \infty$; inferindo que x é limitado e assim que o gráfico de y está à esquerda de uma reta assímptota vertical.

14) Considere a função real dada

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$$

a) Mostre que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e que

$$f'(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\, \mathrm{d}t$$

Além disso mostre que $f(x) \to 0$, quando $x \to \infty$ e que $f(x) \to \infty$ quando $x \to -\infty$.

b) Considere $g(x) = f(x^2)$. Mostre que $g'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-x^2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$. Deduza que

i) $g(x) + \left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{(-t^2)}\, \mathrm{d}t \right)^2 = \dfrac{\pi}{4}$, e portanto $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

15) Considere a série

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{z^{3n}}{(3n)!}$$

a) Mostre que f satisfaz $f'''(z) - f(z) = 0$. Mostre ainda que $f(z) = \dfrac{1}{3}\left(\mathrm{e}^z + 2\,\mathrm{e}^{-z/2} \cos \dfrac{\sqrt{3}z}{2} \right)$.

i) Deduza que

$$\frac{1}{3}\Big(\cosh z + 2 \cosh z \cos(\sqrt{3}z/2) \Big) = \sum_0^\infty \frac{z^{6n}}{(6n)!}$$

16) Sejam a, b, k constantes reais, com $k \neq 0$. Define-se uma seqüência $\{a_n\}$ pelas relações

$$a_0 = a, \quad a_1 = b, \quad k a_{n+2} - (1 + k^2) a_{n+1} + k a_n = 0$$

Considere a série

$$f(z)=\sum_0^\infty a_n \frac{z^n}{n!}$$

a) Mostre que $f(z)$ satisfaz a uma equação diferencial linear de segunda ordem. Encontre $f(z)$ e em seguida encontre uma expressão para os a_n. Analise os casos $k=\pm 1$, separadamente.

17) Estabeleça o desenvolvimento em série de potências da função f definida por $f(z)=\displaystyle\int_0^z \frac{\mathrm{e}^\zeta -1}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta$, determinando o raio de convergência da série. Coloque $g(z)=\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^z \log z\,\mathrm{d}z$. Estabeleça uma relação entre g e certos valores de f.

18) Considere a função $f(z)=\log\dfrac{1+z}{1-z}$, $\quad |z|<1$. Calcule $f^{(n)}(0)$, a n-ésima derivada de f na origem. Use obrigatoriamente o desenvolvimento de Taylor de f na origem para calcular, $\log\dfrac{m}{n}$, $\log 2$ e $\log|\cot z|$.

19) Considere a função $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{-z}}{1+z}$. Mostre que a n-ésima derivada de f na origem é dada por $f^{(n)}(0)=(-1)^n n!\left(1+1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)$.

20) Considere as funções

$$f(z)=\sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}, \qquad g(z)=\sum_0^\infty \frac{(-1)^n\, a^n z^n}{b(b+a)(b+2a)\cdots(b+na)}$$

Seja $h(z)=f(z)g(z)$. Mostre que $h^{(n)}(0)=\dfrac{1}{b+na}$.

21) Escrevendo obrigatoriamente as potências e os produtos de funções trigonométricas como combinação linear de senos e cossenos, calcule a n-ésima derivada na origem das funções $f(z)=\left(\dfrac{\sin z}{z}\right)^2, z\neq 0, f(0)=1, g(z)=\cos^3 z, h(z)=\sin 2z\cos 4z$.

22) Use obrigatoriamente o teorema de Newton-Abel para mostrar que o desenvolvimento de Taylor de $f(z)=\log\dfrac{\sqrt{1+z^2}-1}{z^2}, f(0)=\log\dfrac{1}{2}$, na origem é

$$f(z)=\log\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n 1.3\cdots(2n-1)}{2^{n+1}n(n!)}z^{2n}$$

Determine o raio de convergência da série.

23) Fazendo a decomposição em frações parciais, encontre o desenvolvimento de Taylor das seguintes funções, na origem, determinando o raio de convergência da série: $f(z) = \dfrac{z+2}{z^2+z+1}$, $g(z) = \dfrac{z^4}{z^4+z^2-2}$.

24) Escreva o desenvolvimento de Taylor da função $f(z) = \dfrac{1 - z\cos a}{1 - 2z\cos a + z^2}$, na origem, determinando o raio de convergência da série. Calcule a n-ésima derivada de f na origem.

25) Mostre que

$$\sum_0^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{3z-2}{4z^2} - \frac{(1-z)^2}{2z^3}\log(1-z), \qquad |z| < 1$$

26) Mostre que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+n-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z^2} - z\right)\log(1-z)$$

27) Considere a função $f(x) = \mathrm{e}^x$.

a) Escreva a fórmula de Taylor de ordem 3 de f na origem: Usando tal, mostre que $\mathrm{e}^{1/3} = 1.3951$, com um erro menor que $13 \cdot 10^{-4}$.

28) Usando obrigatoriamente diferenciabilidade, mostre que

$$\sum_0^{n} (p+1)^2 2^p = (n^2+2)2^{n+1} - 3$$

Você saberia demonstrar a identidade por outro(s) método(s) ?

29) Mostre que $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ restrita ao intervalo $[0,1]$ possui um máximo M_n satisfazendo $0 < M_n \leqslant \dfrac{1}{2(n+1)}$.

30) Considere a função $f(x) = \dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$, $\quad x > 0$. Estude monotonicidade de f (crescimento e decrescimento), e deduza que $5^{\sqrt{6}} < 6^{\sqrt{5}}$. Você saberia demonstrar isto por outro método ?

31) Calcule os limites abaixo.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos ax)}{\log(\cos bx)} = (a/b)^2$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \sin x}{(x\sin x)^{3/2}} = \frac{1}{6}$.

c) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^x - x}{1 - x + \log x} = -2.$

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\cot x - 1}{x^2} = \dfrac{-1}{3}.$

e) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log(a + b\,\mathrm{e}^x)}{\sqrt{a + bx^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{b}}$

f) $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\log x}{(1+x)^2} - \log\left(\dfrac{x}{(1+x)}\right)\right) = 0.$

g) $\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\sin x} = 1.$

32) Vamos trabalhar com funções suaves cujos gráficos concordam suavemente com semi-retas ou segmentos de reta.

a) Construa uma função $f \in C^\infty$ bijetiva, estritamente decrescente, satisfazendo

i) $f(0) = 1$ e $f(1) = 0$.

ii) $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0, \quad n = 1, 2 \ldots$

b) A idéia é construir uma função $F : [0,1] \overset{C^\infty}{\longrightarrow} [0,1]$, satisfazendo

i) $F(0) = 1, F(1) = 0$.

ii) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, F^{(k)}(\frac{1}{n}) = 0$.

iii) $\forall k \in \mathbb{N}^*, F^{(k)}(0) = F^{(k)}(1) = 0$. *Sugestão*: Considere a seqüência $\{b_n, \quad n > 0\}$ definida por: $b_1 = 0, \quad b_n = 1 - \mathrm{e}^{-n}, \quad n > 1$. Tome $g_n : \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right] \to [b_n, b_{n+1}]$, definida por $g_n(x) = b_n + (b_{n+1} - b_n) f\left(\dfrac{x - 1/(n+1)}{1/n - 1/(n+1)}\right)$. Finalmente, verifique que F pode ser definida por $F(0) = 1, \quad F(x) = g_n(x), \; \forall\, x \in \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right]$.

c) A idéia é construir uma função real suave F definida em $\mathbb{R}^2$, que toma o valor 1 num disco aberto de raio 1 centrado na origem e vale 0 para todo ponto fora do disco de raio 2 centrado na origem. *Sugestão*: Considere a função $\alpha(x) = \mathrm{e}^{-1/x}, \quad x > 0, \alpha(x) = 0, \quad x \leqslant 0$. Considere $h(x) = \alpha(1-x)\alpha(x)$. Considere f(x)= $\dfrac{1}{\int_{-\infty}^{1} h(x)\,\mathrm{d}x} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} h(t)\,\mathrm{d}t$. Verifique que $F(x,y) = f\left(\dfrac{4 - x^2 - y^2}{3}\right)$, satisfaz a propriedade requerida.

i) Mostre que

$$\|\triangle F(x)\|^2 = \frac{4}{5}\left(f'\left(\frac{4-x^2-y^2}{3}\right)\right)^2 (x^2+y^2)$$

ii) Considere $Z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$Z(y) = (f'(y))^2 \left(\frac{16-12y}{9}\right)$$

Seja g a restrição de f à $[0,1]$ e defina $b(s)$ por $b(s) = Z \circ g^{-1}(s)$. Mostre que a derivada de b em $(0,1)$ é dada por

$$b'(s) = 2f''\left(g^{-1}(s)\right)\left(\frac{16-12g^{-1}(s)}{9}\right) - \frac{12}{9} f'\left(g^{-1}(s)\right)$$

d) Para cada par de números reais $a < b$ considere a função $h_{a,b} : [a,b] \to \mathbb{R}^+$, dada por

$$h_{a,b} = \mathrm{e}^{\frac{-1}{(x-a)^2}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-1}{(x-b)^2}}$$

i) Mostre que $h_{a,b}$ é uma função de classe C^∞ satisfazendo $h_{a,b}^{(k)}(a) = h_{a,b}^{(k)}(b) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Além disso, usando indução, mostre que

$$h_{a,b}^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{(x-a)}, \frac{1}{(x-b)}\right) \cdot \mathrm{e}^{\frac{-1}{(x-a)^2}}\, \mathrm{e}^{\frac{-1}{(x-b)^2}} \qquad \forall x \in [a,b]$$

onde $P_k \in \mathbb{R}[X,Y]$ é um polinômio real com coeficientes inteiros que não dependem nem de a nem de b. Mostre também que

$$\lim_{|a-b| \to 0} \sup\{|h_{a,b}^{(k)}(x)|; \quad x \in [a,b]\} = 0$$

$\forall k \in \mathbb{N}$.

BIBLIOGRAFIA SUCINTA

1) Elon Lages Lima. *Curso de Análise Volume 1.* Projeto Euclides, 1995.

2) Emil Artin. *The Gamma Function.*Holt, Rinehart and Winson, Inc. 1964.

3) Henri Mascart e Marius Stoka. *Fonctions d'une Variable Réele.* PUF, 1986.

4) G. H. Hardy, J. E. Littlewood e G. Pólya. *Inequalities.* Cambridge Press , 1973.

5) J. Rivaud. *Séries; équations différentielles.* Vuibert, 1973.

6) M. Spivak, *Calculus.* Dois volumes. Ed. Reverté, Barcelona, 1970.

7) M. Spivak, *Calculus on manifolds.* Benjamin, N. York, 1965.

8) Nicholas D. Kazarinoff. *Analytic Inequalities.* Holt, Rinehart and Winson, Inc. 1961.

9) Ralph P. Boas, Jr. *A Primer of Real Functions.* Math. Assoc. of Amer. John Wiley and Sons, Inc. 1960.

10) Walter Rudin. *Princípios de Análise Matemática.* Livro Técnico, N, 1971.

11) Srishti D. Chatterji. *Cours d'Analyse 1,2.* Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1997.

12) Tom M. Apostol. *Calculus, vol. II* (second edition). J. Wiley & Sons, 1969.