LISTA 6 DE ANÁLISE REAL 2009

RICARDO SA EARP

Diferenciabilidade de funções reais de uma variável real

(1) Usando o cálculo diferencial, comportamento da primeira, segunda derivadas, convexidade,etc..., reveja e refaça os seguintes exercícios das Listas 1 e 2:
  (a) As duas primeiras desigualdades do exercício (6) da Lista 1.
  (b) A desigualdade do exercício (16) da Lista 1.
  (c) As desigualdades do exercício (4) da Lista 2.
  (d) Refaça o exercício (1) da Lista 3.

(2) Considere a função $f(x) = \dfrac{\log x}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$. Estude monotonicidade de f (crescimento e decrescimento), e deduza que $5^{\sqrt{6}} < 6^{\sqrt{5}}$. Você saberia demonstrar isto por outro método ?

(3) Responda verdadeiro ou falso. Caso verdadeiro, deduza, caso falso dê um contraexemplo.
  (a) Seja $f(x) \geqslant 0$ uma função suave definida em $[0, \infty)$, Assuma que $f(x) > 0$, para $x > 0$. Assuma que $\lim x^2 \log f(x) \to -1$, quando $x \to 0^+$. Segue que $f(x)$, assim como todas as suas derivadas são nulas na origem.
  (b) Existe um valor k, para o qual a equação

$$x^3 + x^2 - 5x + k = 0$$

  tem dois zeros no intervalo $(0, 1)$.
  (c) A função $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ restrita ao intervalo $[0, 1]$ possui um máximo M_n satisfazendo $0 < M_n \leqslant \dfrac{1}{2(n+1)}$.
  (d) Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitada de classe C^2 é necessariamente de classe C^3.
  (e) Seja f uma função real contínua definida num intervalo fechado $[a, b]$ e duas vezes diferenciável no aberto (a, b). Assuma que $f(a) = f(b) = 0$ e que $f''(x) \leqslant 0$ em (a, b). Segue então que $g(x) \geqslant 0$ em $[a, b]$.

(f) Se f uma função real contínua num intervalo fechado $[a,b]$ e duas vezes diferenciável no aberto (a,b), satisfazendo $f''(x) \leqslant 0$ em (a,b), então $f(x) \geqslant f(a)+(x-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, em (a,b). (Aqui uma dedução analítica é exigida).

(g) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$. Segue então que existe c, tal que $f'(c) = 0$.

(h) Para cada real t, a equação $x = -t+\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{t-x}{\sqrt{2}}\right)$ possui pelo menos 1 solução.

(4) Considere a função $f(x) = e^x - x^2 - x$. Com a ajuda moderada do MAPLE, estude o comportamento da função (análise da primeira e segunda derivadas, etc...), esboçando o seu gráfico.

(5) Seja a e b dois números reais não nulos distintos. Estude a monotonicidade da função $f(x) = \left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}, \quad x > 0.$

(6) Seja f uma função real duas vezes diferenciável definida num intervalo aberto I. Seja $a \in I$. Deduza que

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$$

(7) Estude a classe de diferenciabilidade da função $f_\alpha(x) = |x|^\alpha$, separando os casos de $\alpha \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$.

(8) Considere a função $f(x) = (a^2+x)^{1/2}$. Seja $b > 0$. Utilizando o teorema do valor médio, mostre que

$$(a^2+x)^{1/2} < |a| + \frac{b}{2|a|}, \qquad \forall x \in (0,b)$$

Deduza que

$$f(b) > |a| + \frac{b}{2\left(|a| + \dfrac{b}{2|a|}\right)}$$

Conclua que se $a > 0$ e $b > 0$, então

$$a + \frac{ab}{2a^2+b} < (a^2+b)^{1/2} < a + \frac{b}{2a}$$

Obtenha que

$$3\frac{3}{10} < \sqrt{11} < 3\frac{1}{3}$$

(9) Aplique obrigatoriamente a fórmula de Taylor de ordem 4 para $\sin x$ em $a = 0$, para mostrar que

$$x - \frac{x^3}{3!} < \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}, \qquad \forall x \in [1, 2]$$

(10) Seja f uma função real definida num intervalo I de comprimento $2l$. Assuma que f é duas vezes diferenciável em I. Além disso, suponha que f e f'' sejam limitadas. Seja $M_0 = \sup_{x \in I} |f(x)|$ e $M_2 = \sup_{x \in I} |f''(x)|$.

(a) Seja x_0 um ponto interior de I e seja λ um número real positivo tal que o intervalo $J = J(x_0, \lambda) = [x_0 - \lambda, x_0 + \lambda]$ seja contido no interior de I. Mostre que

$$|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{\lambda} + \lambda M_2, \qquad \forall x \in J$$

(b) Mostre que se $0 < \lambda < l$, pode-se encontrar x_0 no interior de I tal que a desigualdade acima seja válida para todo $x \in I$. Além disso, mostre que se f' é limitada em I, tem-se que

$$\sup_{x \in I} |f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{\lambda} + \lambda M_2, \qquad \forall \lambda \in (0, l)$$

(c) Conclua que se $l > \sqrt{\dfrac{M_0}{M_1}}$, tem-se que $M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_1}$.

(d) Estude o caso $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{2}$ no intervalo $[-1, 1]$.

(11) Seja $y = f(x)$ uma função positiva, crescente, duas vezes diferenciável no intervalo (x_0, x_1). Suponha que para certo $A > 0$, y satisfaça a desigualdade diferencial

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \leqslant \frac{1}{y(1 + y'^2)^{1/2}} + \frac{A}{y^2(1 + y'^2)}$$

(a) Mostre que a função

$$\frac{1}{2} \log(1 + y'^2) - \log y + \frac{A}{y}$$

é decrescente em (x_0, x_1). Deduza que existem constantes $b > 0$ e c tal que

$$y(x) < c\,\mathrm{e}^{bx}$$

(12) Seja $y = f(x)$ uma função positiva, crescente, estritamente convexa, duas vezes diferenciável num intervalo $(0, x_1)$. Suponha que para certo $0 < a < 1$, y satisfaça a desigualdade diferencial

$$\frac{y''}{2(1+y'^2)^{3/2}} - \frac{1}{2y(1+y'^2)^{1/2}} = a\left(\frac{y''}{2(1+y'^2)^{3/2}} + \frac{1}{2y(1+y'^2)^{1/2}}\right)$$

(a) Mostre que a equação acima é equivalente a

$$\frac{y''y'}{1+y'^2} = \alpha\frac{y'}{y}, \qquad \alpha = \frac{1+a}{1-a}$$

(b) Fazendo uma integração mostre que

$$\log\left(\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y^\alpha}\right) = \text{const} = c$$

Deduza que

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\mathrm{e}^{2c}\, y^{2\alpha} - 1}} = x + d, \quad d \in \mathbb{R}$$

Considerando uma primitiva qualquer $I(y)$ de $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2c}\, y^{2\alpha} - 1}}$, mostre que tal é limitada quando $y \to \infty$; inferindo que x é limitado e assim que o gráfico de y está à esquerda de uma reta assímptota vertical.

(13) Calcule os limites abaixo.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos ax)}{\log(\cos bx)} = (a/b)^2.$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \sin x}{(x\sin x)^{3/2}} = \frac{1}{6}.$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x^x - x}{1 - x + \log x} = -2.$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cot x - 1}{x^2} = \frac{-1}{3}.$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\log(a + b\,\mathrm{e}^x)}{\sqrt{a + bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\log x}{(1+x)^2} - \log\left(\frac{x}{(1+x)}\right)\right) = 0.$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\sin x} = 1.$

(14) Vamos trabalhar com funções suaves cujos gráficos concordam suavemente com semi-retas ou segmentos de reta.

(a) Construa uma função $f \in C^\infty$ bijetiva, estritamente decrescente, satisfazendo
   (i) $f(0) = 1$ e $f(1) = 0$.
   (ii) $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0, \quad n = 1, 2 \ldots$

(b) A idéia é construir uma função $F : [0,1] \xrightarrow{C^\infty} [0,1]$, satisfazendo
   (i) $F(0) = 1, F(1) = 0$.
   (ii) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, F^{(k)}(\frac{1}{n}) = 0$.
   (iii) $\forall k \in \mathbb{N}^*, F^{(k)}(0) = F^{(k)}(1) = 0$. *Sugestão*: Considere a seqüência $\{b_n, \quad n > 0\}$ definida por: $b_1 = 0, \quad b_n = 1 - \mathrm{e}^{-n}, \quad n > 1$. Tome $g_n : \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \to [b_n, b_{n+1}]$, definida por $g_n(x) = b_n + (b_{n+1} - b_n) f\left(\frac{x - 1/(n+1)}{1/n - 1/(n+1)}\right)$. Finalmente, verifique que F pode ser definida por $F(0) = 1, \quad F(x) = g_n(x), \ \forall\ x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$.

(c) A idéia é construir uma função real suave F definida em $\mathbb{R}^2$, que toma o valor 1 num disco aberto de raio 1 centrado na origem e vale 0 para todo ponto fora do disco de raio 2 centrado na origem. *Sugestão*: Considere a função $\alpha(x) = \mathrm{e}^{-1/x}, \quad x > 0, \alpha(x) = 0, \quad x \leqslant 0$. Considere $h(x) = \alpha(1-x)\alpha(x)$. Considere f(x)= $\dfrac{1}{\int_{-\infty}^{1} h(x)\,\mathrm{d}x} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} h(t)\,\mathrm{d}t$.

   Verifique que $F(x,y) = f\left(\dfrac{4 - x^2 - y^2}{3}\right)$, satisfaz a propriedade requerida.

(d) Para cada par de números reais $a < b$ considere a função $h_{a,b} : [a,b] \to \mathbb{R}^+$, dada por

$$h_{a,b} = \mathrm{e}^{\dfrac{-1}{(x-a)^2}} \cdot \mathrm{e}^{\dfrac{-1}{(x-b)^2}}$$

   (i) Mostre que $h_{a,b}$ é uma função de classe C^∞ satisfazendo $h_{a,b}^{(k)}(a) = h_{a,b}^{(k)}(b) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Além disso, usando indução, mostre que

$$h_{a,b}^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{(x-a)}, \frac{1}{(x-b)}\right) \cdot \mathrm{e}^{\dfrac{-1}{(x-a)^2}}\, \mathrm{e}^{\dfrac{-1}{(x-b)^2}} \qquad \forall x \in [a,b]$$

onde $P_k \in \mathbb{R}[X,Y]$ é um polinômio real com coeficientes inteiros que não dependem nem de a nem de b. Mostre também que

$$\lim_{|a-b| \to 0} \sup\{|h_{a,b}^{(k)}(x)|; \quad x \in [a,b]\} = 0$$

$\forall k \in \mathbb{N}$.