LISTA 6 DE ANÁLISE REAL 2010

RICARDO SA EARP

Limites e continuidade de funções reais

(1) Dado um número real r, considere a função real $f(x)$ definida por

$$\begin{cases} f(x) = x\left|1+\dfrac{1}{x}\right|^r & \text{se } x \neq 0, -1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

(a) Mostre que $f(x)$ é contínua no conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

(b) Mostre que $f(x)$ é diferenciável neste conjunto e que sua derivada verifica

$$f'(x) = f(x) \cdot \frac{x+1-r}{x(x+1)} \tag{1}$$

para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

(c) Mostre que para $r < 1$, $f(x)$ é contínua em $x = 0$ e que para $r \geqslant 1$, $f(x)$ é descontínua em $x = 0$.

(d) Mostre que se $r < 0$ então $f'(0) = 0$, se $r = 0$ então $f'(0) = 1$. O que acontece para $0 < r < 1$?

(e) Usando a fómula (1) acima, mostre que $f'(x)$ é contínua em $x = 0$, para $r \leqslant 0$.

(f) Mostre que para $r > 0$, $f(x)$ é contínua em $x = -1$.

(i) Mostre que se $r > 1$, então $f'(-1) = 0$ e $f'(x)$ é contínua em $x = -1$.

(ii) Mostre que se $r = 1$, então $f(x)$ possui uma derivada lateral à direita e uma derivada lateral à esquerda em $x = -1$. Calcule-as.

(2) Considere o *teorema do valor intermediário*: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Seja d tal que $f(a) < d < f(b)$. Segue que existe $c \in (a, b)$, tal que $f(c) = d$.

(a) Considere a função polinomial

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1, \qquad n > 0$$

(i) Mostre que $f_n(x)$ possui um único zero positivo a_n. Estime a_2.
(ii) Mostre que a seqüência $\{a_n\}$ é monótona decrescente e deduza que $a_n \downarrow \frac{1}{2}$ (quando $n \to \infty$)

(b) Sejam $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ duas funções contínuas, satisfazendo $f(0) = 1$ e $g(0) = 2$. Assuma que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ e que $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Deduza que que existe $y > 0$ tal que $f(y) = g(y)$.

(3) Considere o conjunto X das funções definidas em toda reta real $\mathbb{R}$ que verificam a condição funcional

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{2}$$

(a) Mostre que X é um espaço vetorial.
(b) Mostre que X contém um subespaço vetorial X_1 de dimensão 2, interpretando a condição (2) geometricamente.

(4) Considere f uma função real definida no intervalo fechado $[0, 1]$ satisfazendo a condição

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K\sqrt{|x - y|}, \qquad \forall x, y \in [0, 1] \tag{4}$$

onde K é uma constante positiva qualquer.
(a) Mostre que f é uniformemente contínua em $[0, 1]$.
(b) Mostre que o conjunto X das funções que satisfazem (4) forma um espaço vetorial.
(c) Exiba uma família de funções contínuas em $[0, 1]$ que não verifique a condição (4). Estude a diferenciabilidade desta família em $[0, 1]$.
(d) Será que uma função contínua em $[0, 1]$, diferenciável em $(0, 1)$ com derivada limitada verifica a condição (4) ?
(e) Dê um exemplo de uma função satisfazendo (4) que seja diferenciável em $(0, 1)$, mas cuja derivada não seja limitada.

(5) Considere a função $f(x) = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x}$ para $x \in [0, 1]$. Sem usar o cálculo diferencial mostre que f é decrescente. Determine o máximo global e o mínimo global de f.

(6) Considere a função $f(x) = \dfrac{x^r - 1 - r(x - 1)}{(x - 1)^2}$, onde $r \in \mathbb{Z}^+$. Usando obrigatorialmente o conhecimento da série binomial, mostre que
(a) $f(x) \to \dfrac{r(r - 1)}{2}$, quando $x \to 1$.

(7) Seja $C > 0$ e $\alpha \in (0, 1)$. Seja $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função α-Hölder contínua, *i.e* $f(x)$ satisfaz:

$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^{\alpha}$, $\forall x, y \in (a, b)$.

(a) Deduza, *com rigor*, que os limites $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to b^-} f(x)$, existem.

(b) Deduza que existe uma função contínua $F\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $F(x) = f(x), \forall x \in (a, b)$ ($F(x)$ é chamada de extensão contínua de $f(x)$). Além disso deduza que $F(x)$ é α-Hölder contínua (em $[a, b]$). Escreva com rigor.

(8) Seja $f : [a, b] \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^0, onde I é um intervalo aberto da reta. Seja $\varepsilon > 0$. Seja x_0 um ponto de I. Deduza que existe uma vizinhança V de x_0, tal que

$$\forall x \in V, \forall t \in [a, b], |f(t, x) - f(t, x_0)| < \varepsilon$$