

LISTA 6 DE ANÁLISE REAL 2011

RICARDO SA EARP

Compacidade, conexidade e continuidade em espaços métricos

- (1) Deduza as afirmações abaixo:
- (a) Seja A um conjunto limitado não compacto de \mathbb{R} . Segue então que existe uma função contínua $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ que não é limitada e existe $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ limitada, mas o $\sup_x f(x)$ não é atingido.
 - (b) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ contínua tal que $f(x) \rightarrow 0$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$. Segue então que f assume um máximo global.
 - (c) Todo conjunto infinito limitado de \mathbb{R}^n possui um ponto de acumulação.
 - (d) Toda sequência limitada de \mathbb{R}^n possui um valor aderente.
 - (e) Seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada em \mathbb{R}^N tal que toda subsequência converge para o mesmo ponto a de \mathbb{R}^N . Segue então que $x_n \rightarrow a$, quando $n \rightarrow \infty$.
- (2) Seja A um subconjunto não vazio de \mathbb{R}^n . Definimos:
- $$f(x) := \text{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|, \quad x \in \mathbb{R}^n$$
- que se chama de distância de x ao conjunto A . Deduza:
- (a) f é Lipschitz, logo uniformemente contínua em \mathbb{R}^n .
 - (b) Dê uma caracterização da aderência \bar{A} de A em termos de $f(x)$.
 - (c) Deduza que para $t > 0$ o conjunto $V_t(A) = \{x; \text{dist}(x, A) < t\}$ é uma vizinhança de A e de \bar{A} .
 - (d) Dados dois conjuntos A, B de \mathbb{R}^n defina $\text{dist}(A, B)$, a distância de A a B . Conclua que se A é compacto e B é fechado e $A \cap B = \emptyset$, então $\text{dist}(A, B) > 0$. Mostre ainda que isto é falso se A e B forem apenas fechados.
- (3) Deduza que a esfera unitária $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$ em \mathbb{R}^{n+1} é um conjunto conexo. Seja $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Deduza que existe $p \in \mathbb{S}^n; f(p) = f(-p)$.
- (4) Sejam $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas, satisfazendo $f(0) < g(0)$. Exiba condições suficientes para que exista um ponto $y > 0$, tal que $f(y) = g(y)$. Exiba condições suficientes

para que exista um único ponto $y > 0$, tal que $f(y) = g(y)$. Dê exemplos explícitos de ambas as situações.

- (5) Sejam $f, g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ duas funções contínuas, satisfazendo $f(0) = 1$ e $g(0) = 2$. Assuma que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ e que $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Segue então que existe $y > 0$ tal que $f(y) = g(y)$.
- (6) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ contínua tal que $f(0) = 1/2$ e $f(x) \rightarrow 1$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$. Deduza que f assume um mínimo global.
- (7) Deduza que uma matrix real $(2n + 1) \times (2n + 1)$ possui sempre um autovalor real.
- (8) Seja $f : X \rightarrow Y$, uma aplicação contínua de um espaço métrico compacto X em um espaço métrico Y . Deduza que f é uniformemente contínua.
- (a) Deduza que $f(x) = \sqrt{x}$ é Lipschitz para $x \geq a > 0$ e uniformemente contínua, mas não Lipschitz em $[0, \infty)$.
- (b) Estenda o que foi feito no item anterior para a função $f(x) = x^{1/p}$, $x \geq 0$, $p \in \mathbb{Z}^+$.
- (c) Seja X um subconjunto da reta real \mathbb{R} . Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, uma aplicação uniformemente contínua. Deduza que se a é um valor aderente a X , então limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, existe. Conclua que toda aplicação uniformemente contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, admite uma única extensão contínua $F : \overline{X} \rightarrow \mathbb{R}$, (i. e, $F|_X = f$, F restrita a X é igual à f) que é uniformemente contínua. Além disso, conclua que se X é limitado, então $f(X)$ é limitado.
- (d) Dê exemplos de funções contínuas definidas em $(0, 1]$ que não são uniformemente contínuas.
- (e) Estabeleça um critério usando sequências para que uma função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ não seja uniformemente contínua. Aplique para deduzir que $f(x) = x^3$ não é uniformemente em \mathbb{R} .
- (9) Seja X um subconjunto de um espaço métrico Z . Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, uma aplicação uniformemente contínua. Deduza que se a é um valor aderente a $X \subset Z$ (imagine X contido num espaço métrico ambiente Z , digamos $Z = \mathbb{R}^n$), então limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, existe. Conclua que toda aplicação uniformemente contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, admite uma única extensão contínua $F : \overline{X} \rightarrow \mathbb{R}$, que é além disso uniformemente contínua.
- (10) Generalize o item anterior para uma aplicação uniformemente contínua $f : X \subset Z \rightarrow Y$, de um espaço métrico $X \subset Z$ num espaço métrico completo Y .

- (11) (*Teorema do ponto fixo de Brouwer*) Deduza que toda aplicação contínua $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ possui um ponto fixo, isto é $f(x) = x$ para algum $x \in [0, 1]$. Estabeleça alguma condição que garanta que o ponto fixo é único.
- (12) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real convexa que não é injetora. Deduza que f assume um mínimo global.
- (13) (*Teorema do ponto fixo de Banach*). Seja X um conjunto fechado não vazio de \mathbb{R}^n e seja $f : X \rightarrow X$ uma contração de constante k , $0 \leq k < 1$, ou seja f satisfaz

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|, \forall x, y \in X.$$

Deduza que f tem um único ponto fixo, i.e existe $p \in X$ tal que $f(p) = p$.

- (14) Seja X um espaço métrico. Seja Y um subconjunto de X .
- (a) Assuma que $Y = A \cup B$, onde A e B são subconjuntos abertos disjuntos não vazios. Deduza que $\overline{A} \cap B = \emptyset$ e que $\overline{B} \cap A = \emptyset$, ou seja nenhum destes dois subconjuntos contém valores aderentes do outro.
Sugestão: Deduza que $A = \overline{A} \cap Y$, concluindo que $\overline{A} \cap B = \emptyset$.
- (b) Reciprocamente, deduza que se $Y = A \cup B$, onde A e B são subconjuntos disjuntos não vazios, tal que $\overline{A} \cap B = \emptyset$ e que $\overline{B} \cap A = \emptyset$. Deduza que A e B são abertos em Y .
- (c) Assuma que $X = C \cup D$, onde C e D são subconjuntos disjuntos não vazios. Deduza que se Y é conexo; então ou $Y \subset C$, ou $Y \subset D$.
- (d) Deduza que a coleção de subconjuntos conexos de X que tem um ponto em comum é conexa.
- (e) Se Y é conexo e se $Y \subset B \subset \overline{Y}$, então B é conexo; em particular, se Y é conexo então \overline{Y} é conexo.
Sugestão: Escreva $B = C \cup D$, onde C e D são subconjuntos diferentes de vazio. Observe que se $Y \subset C$ então $\overline{Y} \subset \overline{C}$.
- (f) Exiba um exemplo de um conjunto conexo que não é conexo por caminhos.
- (g) Deduza que as *componentes conexas* de X são subconjuntos conexos disjuntos cuja união é X . Além disso, deduza que cada conexo de X , intercepta uma e apenas uma de tais componentes.
- (15) RESPONDA VERDADEIRO OU FALSO EM CADA ITEM. CASO VERDADEIRO ESBOCE UMA DEDUÇÃO SUCINTA CORRETA E EXIBA UM EXEMPLO QUE ILUSTRE A AFIRMAÇÃO, SE FOR O CASO. CASO FALSO, EXPLICA A FALSIDADE OU EXIBA UM

CONTRAEXEMPLO, CONFORME A SITUAÇÃO. JUSTIFIQUE A SUA RESPOSTA. NÃO SERÃO ACEITAS RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS CORRETAS.

- (a) Não é verdade que para todo número real positivo $a > 0$, o conjunto

$$A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1}; \\ z^2 + \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} - 2a\right)^2 = a^2\}$$

é compacto.

- (b) Seja $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida na bola unitária aberta centrada na origem de \mathbb{R}^3 , satisfazendo $f(0, 0, 0) = 0$.

Defina $F(x, y, z) := e^{f(x, y, z)}$, $(x, y, z) \in B_1(0)$.

Segue que sempre podemos encontrar $\varepsilon > 0$, tal que

$$F(x, y, z) > 1/2, \forall (x, y, z) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon).$$

- (c) Seja $C > 0$ e $\alpha \in (0, 1)$. Seja $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, uma função α -Hölder contínua, i.e $f(x)$ satisfaz:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \forall x, y \in (-1, 1).$$

Seja $g(x) = e^{f(x)}$, $x \in (-1, 1)$.

Segue que $g(x)$ admite uma extensão contínua $G(x)$ ao intervalo fechado $[-1, 1]$. Ou seja, existe $G : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, contínua tal que $G(x) = g(x)$, $\forall x \in (-1, 1)$.

- (d) (i) Seja $g : (-1/2, \infty) \rightarrow (-1, 1)$ dada por $g(x) = \frac{x}{1+x}$, $x \in (-1/2, \infty)$. Segue que g é um homeomorfismo.

(ii) Considere a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (x/(1+x))^n$,

$$x \in [-1/4, 1/2].$$

Segue então que a série é absolutamente convergente para todo $x \in [-1/4, 1/2]$, mas não é uniformemente convergente no intervalo $[-1/4, 1/2]$.

ADENDUM:

- (16) Agora vamos tratar o conceito de *funções semi-contínuas*. Seja

X um espaço métrico. Seja $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Vamos ver primeiro a definição de funções semi-contínuas superiormente.

Dizemos que φ é *semi-contínua superiormente* (denotamos *scs*), se para cada $a \in X$, temos que

$$\limsup_{x \rightarrow a} \varphi(x) \leq \varphi(a)$$

Ou seja, $\forall \varepsilon > 0, \exists$ vizinhança U de a em X tal que $\varphi(x) \leq \varphi(a) + \varepsilon, \forall x \in U$, se $\varphi(a) > -\infty$. Se $\varphi(a) = -\infty$, a condição é que $\forall A > 0, \exists$ vizinhança U de a , tal que $\varphi(x) < -A, \forall x \in U$.

Por outro lado, Dizemos que $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é *semi-contínua inferiormente* (denotamos *sci*), se para cada $a \in X$, temos que

$$\liminf_{x \rightarrow a} \varphi(x) \geq \varphi(a)$$

Ou seja, $\forall \varepsilon > 0, \exists$ vizinhança U de a em X tal que $\varphi(x) \geq \varphi(a) - \varepsilon, \forall x \in U$, se $\varphi(a) < \infty$. Se $\varphi(a) = \infty$, a condição é que $\forall A > 0, \exists$ vizinhança U de a , tal que $\varphi(x) > A, \forall x \in U$.

(a) (*caracterização das funções scs*) Mostre que $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, é *scs* se e somente se $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\{x; \varphi(x) < \lambda\}$$

é aberto em X .

(b) Mostre que se φ é *scs*, então φ é *limitada superiormente* em qualquer compacto $K \subset X$

(c) Mostre que se X é compacto e se φ é *scs*, então f assume o máximo em K .

(d) Mostre que se φ é *scs* e limitada superiormente em X , então o conjunto $\{x; \varphi(x) = M\}$ é fechado em X .

(e) Deduza que se u é *scs* e $u(x) \geq 0, \forall x \in X$, então $v(x) := \log u(x)$ é ainda *scs*, definindo $v(x) = -\infty$, sempre que $u(x) = 0$.

(f) Mostre que se φ_1 e φ_2 são funções semi-contínuas superiormente, então, se $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$, as funções $x \mapsto \varphi_1(x) + \varphi_2(x), x \mapsto \max(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ e $\lambda\varphi_1(x)$ são *scs*.

(g) Se $\{\varphi_n\}$ é uma seqüência de funções *scs* no espaço métrico X , assumindo que $\varphi_{n+1}(x) \leq \varphi_n(x)$, mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$ é ainda *scs*.

(h) (*caracterização das funções sci*) Mostre que $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, é *sci* se e somente se $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\{x; \varphi(x) \leq \lambda\}$$

é fechado em X .

(i) Mostre que toda função *sci* definida num espaço métrico compacto X assume o mínimo em X .

- (j) Mostre que se φ é *scs*, então $-\varphi$ é *sci*.
- (k) Mostre que φ é contínua, se e somente se φ é *scs* e *sci*.

OBS: Seja X um espaço métrico e seja u uma função semicontínua superiormente. Segue então que existe uma sequência de funções contínuas $\{u_n\}$ em X tais que: $u_{n+1}(x) \leq u_n(x)$, $n \geq 1, x \in X$ e $u_n(x) \rightarrow u(x)$ ($n \rightarrow \infty$), ou seja $u_n \downarrow u$.