

ANÁLISE REAL-2002.2–Lista 7

Professor: Ricardo Sá Earp

Diferenciabilidade e Integração, II

- 1) Mostre *com todos os detalhes* que se f é monótona em $[a, b]$ e se α é contínua em $[a, b]$, então f é Riemann -Stieltjes integrável em $[a, b]$.
- 2) Mostre *com todos os detalhes* que se f e g são Riemann-Stieltjes integráveis em $[a, b]$ então
 - i) fg é Riemann -Stieltjes integrável em $[a, b]$.
 - ii) $|f|$ é Riemann -Stieltjes integrável em $[a, b]$ e $\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq \int_a^b |f| d\alpha$.
- 3) Discuta amplamente funções de variação limitada (veja ref. 10)).
- 4) Defina curvas retificáveis e comprimento. Mostre que uma curva parametrizável $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 , i.e com $\gamma'(t)$ contínua, é retificável e tem comprimento l dado por

$$l = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

- 5) Enuncie rigorosamente e mostre o teorema “teste da integral” do Cálculo. Dê exemplos e aplicações às séries. Esboce figuras elucidativas, explicando a geometria envolvida.
- 6) Mostre que a função $f(x)$ definida por $f(x) = 0$, se x é irracional e $f(x) = 1$, se x é racional não é integrável em $[a, b]$ para qualquer $a < b$.
- 7) Dê um exemplo não trivial de uma função limitada em $[0, 1]$ cujos pontos de descontinuidades (p. ex. \mathbb{Q}) seja de medida nula e mostre que tal é Riemann integrável, calculando a integral.
- 8) Enuncie rigorosamente e demonstre a fórmula de Taylor com resto integral, fazendo alguma aplicação desta.

9) Mostre que

$$\int_a^b \frac{1}{(t^2 + 1)^{n+1}} dt = \frac{1}{2n} \frac{t}{(t^2 + 1)^n} \Big|_a^b + \frac{2n-1}{2n} \int_a^b \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt$$

10) Calcule

a)

$$\int_0^1 \frac{1}{t^4 + 1} dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\pi}{2}$$

b)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 t dt = \frac{3\pi}{16}$$

c)

$$\int_a^x \frac{1}{\sin^4 t} dt = \left(\frac{1}{3 \tan^3 a} - \frac{1}{3 \tan^3 x} \right) + \left(\frac{1}{\tan a} - \frac{1}{\tan x} \right)$$

11) Estude a convergência das integrais impróprias

a)

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} e^{-xy} dy$$

- i) Será a integral convergente para $x > 0$?
- ii) Será a integral (ou seja $\varphi(x)$) *uniformemente convergente* para $x > 0$?
- iii) Será a integral (ou seja $\varphi(x)$) *uniformemente convergente* para $x > x_0$ com $x_0 > 0$?

b)

$$\varphi(x) = \int_1^{\infty} \frac{1}{y^{1+x}} dy$$

- i) Será a integral (ou seja $\varphi(x)$) *uniformemente convergente* para $x > 0$?

c) (*Integrais de Bertrand*)

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} dt$$

onde $\alpha > 1$; ou $\alpha = 1, \beta > 1$. Resposta: Convergente.

i) O que você pode dizer da série

$$\sum_2^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$$

quando $\alpha > 1$, ou $\alpha = 1, \beta > 1$?

d)

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}} dt,$$

Resposta: $\alpha > 1$ (absolutamente convergente), $\alpha = 1$ (convergente), $\alpha > 0$ (convergente).

e) (*Integrais de Fresnel*)

$$\int_0^{\infty} \sin t^2 dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}, \quad \int_0^{\infty} \cos t^2 dt$$

Resposta: Convergente.

f)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx = \pi e^{-\alpha}, \quad \alpha > 0$$

i) É permissível a derivação sob o símbolo da integração com respeito a α ? Você precisa justificar a convergência uniforme (mas, não convergência absoluta) da integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx !!$$

g)

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad 0 < a < 1$$

12) Mostre que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta = 0$$

Nota: Na verdade, $\lim_{R \rightarrow \infty} R \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta = 2$ (veja ref. 11)).

13) Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{zt - \alpha t^2} dt = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{z^2/4\alpha}, \quad \alpha > 0$$

Nota: Na verdade, pode ser mostrado que a igualdade acima é válida $\forall z \in \mathbb{C}$. Fazendo $z = -i\xi$, tem-se

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-i\xi t} dt = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{-p^2/4\alpha}, \quad p \in \mathbb{R}, \alpha > 0$$

que é a chamada *Transformada de Fourier* de $t \mapsto f(t) = e^{-\alpha t^2}$, definida em sala de aula.

14) Calcule as transformadas de Fourier das funções indicadas abaixo.

a) $u_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq a, \quad a > 0 \\ 0 & \text{se } |x| > a \end{cases}$.

Resposta: $\frac{2 \sin a\xi}{\xi \sqrt{2\pi}}$.

b) $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$. Resposta: $\frac{2a}{(a^2 + \xi^2)\sqrt{2\pi}}$.

c) $f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$.

Resposta: $\frac{1}{(a + i\xi)\sqrt{2\pi}}$.

15) (*Função Gamma*) Considere as funções

$$\Gamma_1(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \Gamma_2(x) = \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

- a) Serão as integrais acima uniformemente convergentes $\forall x \in \mathbb{R}^+$?
 b) Serão as integrais acima uniformemente convergentes em qualquer intervalo $[a, b]$, $a > 0$?
 c) Mostre, exibindo rigorosamente os detalhes, que a função Gamma dada por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

é infinitamente diferenciável em $(0, \infty)$ e que

$$\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} (\ln t)^k t^{z-1} dt$$

d) Mostre a relação funcional

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$$

deduzindo que $\Gamma(n + 1) = n!$.

16) Estude a função Beta dada por

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$$

mostrando que

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad B(p, q) = B(q, p) \quad p > 0, q > 0$$

Nota: Sucede do que foi feito que

$$\int_0^{\pi/2} (\cos x)^{\alpha-1} (\sin x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha/2)\Gamma(\beta/2)}{2\Gamma((\alpha + \beta)/2)}$$

BIBLIOGRAFIA SUCINTA

- 1) Elon Lages Lima. *Curso de Análise Volume 1*. Projeto Euclides, 1995.
- 2) Emil Artin. *The Gamma Function*. Holt, Rinehart and Winson, Inc. 1964.
- 3) Henri Mascal e Marius Stoka. *Fonctions d'une Variable Réelle*. PUF, 1986.
- 4) G. H. Hardy, J. E. Littlewood e G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge Press, 1973.
- 5) J. Rivaud. *Séries; équations différentielles*. Vuibert, 1973.
- 6) M. Spivak, *Calculus*. Dois volumes. Ed. Reverté, Barcelona, 1970.
- 7) M. Spivak, *Calculus on manifolds*. Benjamin, N. York, 1965.

- 8) Nicholas D. Kazarinoff. *Analytic Inequalities*. Holt, Rinehart and Winson, Inc. 1961.
- 9) Ralph P. Boas, Jr. *A Primer of Real Functions*. Math. Assoc. of Amer. John Wiley and Sons, Inc. 1960.
- 10) Walter Rudin. *Princípios de Análise Matemática*. Livro Técnico, N, 1971.
- 11) Srishti D. Chatterji. *Cours d'Analyse 1,2*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1997.
- 12) Tom M. Apostol. *Calculus, vol. II* (second edition). J. Wiley & Sons, 1969.