ANÁLISE REAL-2002.2–Lista 7

Professor: Ricardo Sá Earp

Diferenciabilidade e Integração, II

1) Mostre *com todos os detalhes* que se f é monótona em $[a,b]$ e se α é contínua em $[a,b]$, então f é Riemann -Stieltjes integrável em $[a,b]$.
2) Mostre *com todos os detalhes* que se f e g são Riemann-Stieltjes integráveis em $[a,b]$ então
   i) fg é Riemann -Stieltjes integrável em $[a,b]$.
   ii) $|f|$ é Riemann -Stieltjes integrável em $[a,b]$ e $\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha\right| \leqslant \int_a^b |f|\,\mathrm{d}\alpha$.
3) Discuta amplamente funções de variação limitada (veja ref. 10)).
4) Defina curvas retificáveis e comprimento. Mostre que uma curva parametrizável $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1, i.e com $\gamma'(t)$ contínua, é retificável e tem comprimento l dado por

$$l = \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$$

5) Enuncie rigorosamente e mostre o teorema "teste da integral"do Cálculo. Dê exemplos e aplicações às séries. Esboce figuras elucidativas, explicando a geometria envolvida.
6) Mostre que a função $f(x)$ definida por $f(x) = 0$, se x é irracional e $f(x) = 1$, se x é racional não é integrável em $[a,b]$ para qualquer $a < b$.
7) Dê um exemplo não trivial de uma função limitada em $[0,1]$ cujos pontos de descontinuidades (p. ex. $\mathbb{Q}$) seja de medida nula e mostre que tal é Riemann integrável, calculando a integral.
8) Enuncie rigorosamente e demonstre a fórmula de Taylor com resto integral, fazendo alguma aplicação desta.

9) Mostre que

$$\int_a^b \frac{1}{(t^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n}\frac{t}{(t^2+1)^n}\Bigg]_a^b + \frac{2n-1}{2n}\int_a^b \frac{1}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t$$

10) Calcule

a)

$$\int_0^1 \frac{1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\pi}{2}$$

b)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 t\,\mathrm{d}t = \frac{3\pi}{16}$$

c)

$$\int_a^x \frac{1}{\sin^4 t}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{3\tan^3 a} - \frac{1}{3\tan^3 x}\right) + \left(\frac{1}{\tan a} - \frac{1}{\tan x}\right)$$

11) Estude a convergência das integrais impróprias

a)

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y$$

i) Será a integral convergente para $x > 0$?

ii) Será a integral (ou seja $\varphi(x)$) *uniformemente convergente* para $x > 0$?

iii) Será a integral (ou seja $\varphi(x)$) *uniformemente convergente* para $x > x_0$ com $x_0 > 0$?

b)

$$\varphi(x) = \int_1^\infty \frac{1}{y^{1+x}}\,\mathrm{d}y$$

i) Será a integral (ou seja $\varphi(x)$) *uniformemente convergente* para $x > 0$?

c) (*Integrais de Bertrand*)

$$\int_2^\infty \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$$

onde $\alpha > 1$; ou $\alpha = 1$, $\beta > 1$. Resposta: Convergente.

i) O que você pode dizer da série

$$\sum_2^\infty \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$

quando $\alpha > 1$, ou $\alpha = 1$, $\beta > 1$?

d)

$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t,$$

Resposta: $\alpha > 1$ (absolutamente convergente), $\alpha = 1$ (convergente), $\alpha > 0$ (convergente).

e) (*Integrais de Fresnel*)

$$\int_0^\infty \sin t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}, \qquad \int_0^\infty \cos t^2\,\mathrm{d}t$$

Resposta: Convergente.

f)

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi\,\mathrm{e}^{-\alpha}, \qquad \alpha > 0$$

i) É permissível a derivação sob o símbolo da integração com respeito a α ? Você precisa justificar a convergência uniforme (mas, não convergência absoluta) da integral

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,!!$$

g)

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \qquad 0 < a < 1$$

12) Mostre que

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0$$

Nota: Na verdade, $\lim_{R\to\infty} R\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2$ (veja ref. 11)).

13) Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{zt-\alpha t^2}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{z^2/4\alpha}, \qquad \alpha > 0$$

Nota: Na verdade, pode ser mostrado que a igualdade acima é válida $\forall z \in \mathbb{C}$. Fazendo $z = -i\xi$, tem-se

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t^2}\,\mathrm{e}^{-i\xi t}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{-p^2/4\alpha}, \qquad p \in \mathbb{R}, \alpha > 0$$

que é a chamada *Transformada de Fourier* de $t \mapsto f(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t^2}$, definida em sala de aula.

14) Calcule as transformadas de Fourier das funções indicadas abaixo.

a) $u_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leqslant a, \quad a > 0 \\ 0 & \text{se } |x| > a \end{cases}$.

Resposta: $\dfrac{2\sin a\xi}{\xi\sqrt{2\pi}}$.

b) $f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$, $\quad a > 0$. Resposta: $\dfrac{2a}{(a^2+\xi^2)\sqrt{2\pi}}$.

c) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-ax} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leqslant 0 \end{cases}$.

Resposta: $\dfrac{1}{(a+i\xi)\sqrt{2\pi}}$.

15) (*Função Gamma*) Considere as funções

$$\Gamma_1(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t, \quad \Gamma_2(x) = \int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

a) Serão as integrais acima uniformemente convergentes $\forall x \in \mathbb{R}^+$?

b) Serão as integrais acima uniformemente convergentes em qualquer intervalo $[a,b], a > 0$?

c) Mostre, exibindo rigorosamente os detalhes, que a funçãoGamma dada por

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\,t^{z-1}\,\mathrm{d}t$$

é infinitamente diferenciável em $(0,\infty)$ e que

$$\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,(\ln t)^k\,t^{z-1}\,\mathrm{d}t$$

d) Mostre a relação funcional

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

deduzindo que $\Gamma(n+1) = n!$.

16) Estude a função Beta dada por

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t$$

mostrando que

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad B(p,q) = B(q,p) \quad p>0, q>0$$

Nota: Sucede do que foi feito que

$$\int_0^{\pi/2} (\cos x)^{\alpha-1}(\sin x)^{\beta-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\alpha/2)\Gamma(\beta/2)}{2\Gamma((\alpha+\beta)/2)}$$

BIBLIOGRAFIA SUCINTA

1) Elon Lages Lima. *Curso de Análise Volume 1.* Projeto Euclides, 1995.

2) Emil Artin. *The Gamma Function.*Holt, Rinehart and Winson, Inc. 1964.

3) Henri Mascart e Marius Stoka. *Fonctions d'une Variable Réele.* PUF, 1986.

4) G. H. Hardy, J. E. Littlewood e G. Pólya. *Inequalities.* Cambridge Press , 1973.

5) J. Rivaud. *Séries; équations différentielles.* Vuibert, 1973.

6) M. Spivak, *Calculus.* Dois volumes. Ed. Reverté, Barcelona, 1970.

7) M. Spivak, *Calculus on manifolds.* Benjamin, N. York, 1965.

8) Nicholas D. Kazarinoff. *Analytic Inequalities.* Holt, Rinehart and Winson, Inc. 1961.

9) Ralph P. Boas, Jr. *A Primer of Real Functions.* Math. Assoc. of Amer. John Wiley and Sons, Inc. 1960.

10) Walter Rudin. *Princípios de Análise Matemática.* Livro Técnico, N, 1971.

11) Srishti D. Chatterji. *Cours d'Analyse 1,2.* Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1997.

12) Tom M. Apostol. *Calculus, vol. II* (second edition). J. Wiley & Sons, 1969.