LISTA 7 DE ANÁLISE REAL 2009

RICARDO SA EARP

Diferenciabilidade de funções reaisde várias variáveis reais

(1) Considere

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ se } x = 0, y = 0 \end{cases}$$

(a) Determine se f é limitada ou não no plano $\mathbb{R}^2$.
(b) Determine se f possui um mínimo global. Determine se f possui um máximo global. Calcule as derivadas parciais nestes pontos, caso tais pontos existam.
(c) Escreva a equação do plano tangente relativa a um ponto de máximo global correspondente a um ponto (x,y) contido no primeiro quadrante aberto $x > 0, y > 0$, caso tal ponto exista.
(d) Discuta a continuidade de f na origem e em seguida a continuidade de f em discuta a continuidade em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
(e) Discuta a diferenciabilidade de f.
(f) Discuta a existência e continuidade das derivadas parciais de f, primeiramente na origem e em seguida nos outros pontos do plano.
(g) Discuta a classe de diferenciabilidade de f em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
(h) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f relativa ao ponto $(2,3)$.
(i) Usando o MAPLE, esboce um desenho do gráfico de f.

(2) Considere

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^4+y^2} \text{ se } -1 < x < 1 \\ 0 \text{ se } x = 0, y = 0 \end{cases}$$

Note que f está definida numa faixa vertical.
(a) Determine se f é limitada ou não no plano $\mathbb{R}^2$.
(b) Discuta a continuidade de f.

(c) Discuta a existência e continuidade das derivadas parciais de f, primeiramente na origem e em seguida nos outros pontos do plano.
(d) Discuta a diferenciabilidade de f.
(e) Discuta a classe de diferenciabilidade de f em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(3) Encontre uma E.D.P. de primeira ordem nas variáveis x, y da forma
$$f(x, y, z, z_x, z_y) = 0 \qquad (*)$$
(pensando que $z(x, y)$ é uma função das variáveis x, y satisfazendo a equação $(*)$) cuja *superfícies integral* estão dadas por $xy + z^2 = c$, onde c é uma constante.

(4) Assuma que $F(x, y, z) = 0$ define localmente implicitamente uma superfície que pode ser vista tanto como um gráfico vertical $z = f_1(x, y)$, ou como um gráfico horizontal das duas formas $x = f_2(y, z)$ ou $y = f_3(x, z)$. Mostre que $\dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial z} = -1$, interpretando.

(5) Considere uma superfície de revolução em torno do eixo z da forma $z = F(r)$, $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Mostre que as derivadas parciais de $z = z(x, y)$ satisfazem uma EDP linear (homogênea) de primeira ordem da forma $yp - xq = 0$, onde $p = z_x$ e $q = z_y$.

(6) Considere uma superfície que é localmente o gráfico de uma função $z(x, y)$ dada implicitamente por uma equação da forma $F(u, v) = 0$, onde $u = u(x, y, z)$ e $v = v(x, y, z)$ são funções dadas de x, y, z de classe C^1, e F é uma função dada de u e de v de classe C^1.
(a) Encontre $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ e F explícitas.
(b) Mostre que $p = z_x$ e $q = z_y$ satisfazem uma E.D.P. de primera ordem $p\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)} + q\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(z, x)} = \dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$, onde $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = u_x v_y - u_y v_x$, etc.. Calcule explicitamente nos exemplos dados no item (a).

(7) Seja $v = v(x, y)$ e $u = u(x, y)$, para $(x, y) \in \Omega$, sendo Ω um aberto de $\mathbb{R}^2$. Admita que u, v sejam de classe C^1. Assuma que $u = H(v)$, onde H é de classe C^1.
(a) Encontre $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ e H explícitas; por exemplo, u e v satisfazendo $u^2 + v^2 = 1$ ou $v = u^2 - 3u + 2$.
(b) Mostre que $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = u_x v_y - u_y v_x \equiv 0$. Verifique esta relação nos exemplos obtidos em (a).

(8) Seja A uma matriz $n \times n$. Seja $f(x) = Ax \cdot x$, onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $\cdot$ denota o produto escalar usual em $\mathbb{R}^n$. Encontre uma fórmula para $f'(x)$.

(9) Seja Ω o primeiro octante de $\mathbb{R}^3$ dado por $x > 0, y > 0, z > 0$. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função real diferenciável *positivamente homogênea* em Ω, isto é f satisfaz

$$f(tx) = t^\alpha f(x), \quad t > 0, x \in \Omega$$

Para $x \in \Omega$ fixado, seja $\varphi(t) := f(tx), t > 0$.
   (a) Encontre uma fórmula para $\varphi'(t)$.
   (b) Deduza o *teorema de Euler*: $\nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x), \forall x \in \Omega$.
   (c) Generalize para $\mathbb{R}^n$.

(10) Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é chamada de *harmônica* se
$\triangle f(x) = \sum_{i=1}^n f_{x_i x_i}(x) = 0, x \in \Omega$ onde $x = (x_1, \dots, x_n)$.
   (a) Exiba exemplos de funções harmônicas $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que sejam i) polinômios, ii) funções racionais, iii) funções elementares envolvendo funções trigonométricas e a exponencial. Explicite os seus domínios.
   (b) Exiba uma fórmula para o *Laplaciano* $\triangle f$ de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 em *coordenadas polares* (r, θ).
   (c) Exiba exemplos de funções harmônicas $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que sejam dadas por polinômios.
   (d) Exiba uma fórmula para o *Laplaciano* $\triangle f$ de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 em *coordenadas cilíndricas* (r, θ, z).

   (e) Seja $r(x) := \|x\|, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
      (i) Encontre uma fórmula para as derivadas parciais de $r(x)$.
      (ii) Calcule ∇r o gradiente de $r(x)$, e sua norma $\|\nabla r\|$.
      (iii) Seja $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável. Seja $f := h \circ r$. Deduza que

$$\triangle f = h'' \circ r + \frac{n-1}{r} h' \circ r$$

Conclua que $f(x) = r^{-n+2}, n \geqslant 3$ é harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Conclua o mesmo para $f(x) = \ln r$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
      (iv) Sejam a, b números reais positivos. Considere o domínio $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; 2 < \|x\| < 3\}$ $(n \geqslant 2)$. Resolva o

problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = a & \text{se } \|x\| = 2 \\ u = b & \text{se } \|x\| = 3 \end{cases}$$

(v) Seja f uma função harmônica de definida no disco perfurado $\{0 < x^2 + y^2 < 1\}$. Seja
$h(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right), x^2 + y^2 > 1$. Discuta a harmonicidade ou não de $u(x,y) := f(h(x,y))$ no exterior do disco $x^2 + y^2 > 1$.

(11) (*Revisando o conceito de* convexidade) Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função convexa, onde (a,b) é um intervalo aberto da reta.

(a) Deduza que f é convexa se e só se vale a seguinte desigualdade
$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leqslant \frac{f(u) - f(t)}{u - t}$$
sempre que $a < s < t < u < b$.

(b) Deduza que uma função diferenciável $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ é convexa se e só se a derivada $f'(t)$ é monótona crescente. No caso de f ser uma função de classe C^2, deduza que tal condição é equivalente que $f'' \geqslant 0$ em (a,b).

(c) Deduza também que uma função diferenciável $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ é convexa se e só se para todo $c \in (a,b)$ tem-se que $f(x) \geqslant f(c) + (x - c)f'(c)$, $x \in (a,b)$, e dê uma interpretação geométrica disto.

(d) Quando $f''(x) > 0, \forall x \in (a,b)$ tem-se que f é estritamente convexa. Deduza isto e deduza também que a recíproca deste fato não é verdadeira.
Sugestão: Seja α, β pontos de (a,b) e seja
$c := t\alpha + (1-t)\beta, 0 < t < 1$. Considere
$A := tf(\alpha) + (1-t)f(\beta) - f(c)$. Considerando α e c escreva a *fórmula de Taylor de ordem* 2 (resto de Lagrange)para $f(\alpha) - f(c)$. Idem para $f(\beta) - f(c)$. Observe que
$A = t(f(\alpha) - f(c)) + (1-t)(f(\beta) - f(c))$, e que
$t(\alpha - c) + (1-t)(\beta - c) = 0$. Obtenha uma expressão para A que permite concluir que $A > 0$ se $f'' > 0$ em (a,b).

Tente encontrar um contraexemplo simples para a recíproca.

NOTA: Observe que uma função real F de n variáveis reais é convexa se e só se a restrição f de F a qualquer segmento contido no domínio de definição de F é convexa; donde várias propriedades de F podem ser deduzidas a partir das propriedades das funções convexas de 1 variável real f. Disto se pode concluir o seguinte: Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, onde Ω é um domínio convexo de $\mathbb{R}^n$. Segue então que f é convexa se e só se a matriz hessiana de f é positiva definida ($\geqslant 0$) em todos os pontos de Ω.

Além disto se pode mostrar que uma função diferenciável $f : \Omega \to \mathbb{R}$, onde Ω é um domínio convexo de $\mathbb{R}^n$, é *convexa* se e só se para todo $c \in \Omega$ vale que

$$f(x) \geqslant f(c) + (x - c) \cdot \nabla f(c),\ x \in \Omega$$

com uma interpretação geométrica bonita que você deve poder explicar.