

LISTA 7 DE ANÁLISE REAL 2009

RICARDO SA EARP

Limites e continuidade em espaços métricos

- (1) RESPONDA VERDADEIRO OU FALSO. CASO VERDADEIRO ESBOCE UMA DEDUÇÃO SUCINTA CORRETA E EXIBA UM EXEMPLO QUE ILUSTRE A AFIRMAÇÃO, SE FOR O CASO. CASO FALSO, EXPLICA A FALSIDADE OU EXIBA UM CONTRAEXEMPLO, CONFORME A SITUAÇÃO. JUSTIFIQUE A SUA RESPOSTA
- (a) Sejam $f, g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ duas funções contínuas, satisfazendo $f(0) = 1$ e $g(0) = 2$. Assuma que $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ e que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3/2$. Segue que existe $x_0 > 0$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$. Além disso, deduza que se $f(x)$ é estritamente crescente e $g(x)$ é estritamente decrescente este x_0 é único.
- (b) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ contínua tal que $f(0) = 1/2$ e $f(x) \rightarrow 1$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$. Segue então que f assume um mínimo global positivo m satisfazendo $m \leq 1/2$. Além disso, o máximo global não é atingido.
- (c) Sejam f, g funções contínuas que levam um espaço métrico X na reta real \mathbb{R} . Se $f(a) \neq 0 \neq g(a)$, para certo $a \in X$, segue então que $f(x) \cdot g(x) \neq 0$, numa vizinhança de a .
- (2) Seja $f(x) = v \cdot x$, onde \cdot denota o produto escalar em \mathbb{R}^n , e $v \in \mathbb{R}^n$ é um vetor fixado. Discuta a continuidade de $f(x)$. Mostre que os semi-planos dados pelas equações

$$\{x; v \cdot x > \alpha\} \quad \text{e} \quad \{x; v \cdot x \geq \alpha\}$$

são subconjuntos abertos e fechados, respectivamente. Deduzir que o hiperplano $\{x; v \cdot x = \alpha\}$, é um subconjunto fechado de \mathbb{R}^n . Tais resultados se estendem (da maneira natural) à espaços de Hilbert ?

- (3) Dê uma caracterização de continuidade de uma função f que leva um espaço métrico X num espaço métrico Y em termos de seqüências.

- (4) Mostre que se f, g são funções contínuas que levam um espaço métrico X em \mathbb{R}^n , então se $f(a) \neq g(a)$, para certo $a \in X$, segue-se que $f(x) \neq g(x)$, numa vizinhança de a .
- (5) Dizemos que uma aplicação f que leva um espaço métrico X num espaço métrico Y é *aberta* (resp. *fechada*), se a imagem por f de um aberto de X (resp. fechado) é um aberto de Y (resp. fechado).
- (a) Dê exemplos de aplicações contínuas reais definidas em subconjuntos do espaço Euclidiano que sejam abertas, mas não sejam fechadas.
- (b) Dê exemplos de aplicações contínuas definidas de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n que não sejam abertas nem fechadas.
- (c) Dê exemplos de aplicações contínuas f definidas num intervalo I da reta em \mathbb{R}^2 que sejam injetivas mas não produzem um homeomorfismo entre I e sua imagem $f(I)$.
- (d) Sejam X_1 e Y_1 subconjuntos de X e Y , respectivamente. Seja $f : X_1 \rightarrow X_2$ uma função contínua bijetiva tal que para todo aberto A de X (com a topologia induzida), $f(A)$ é um aberto de Y_1 (com a topologia induzida). Mostre que f é um homeomorfismo.
- (6) Dê exemplos de funções definidas numa vizinhança perfurada da origem de \mathbb{R}^2 que admitem um mesmo limite quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, ao longo de raios que chegam a origem $(0, 0)$ de \mathbb{R}^2 , mas que não admitam uma extensão contínua à origem.
- (7) Responda verdadeiro ou falso. Caso verdadeiro, deduza, caso falso dê um contraexemplo. Lembro que uma propriedade importante de funções contínuas é o seguinte: Um função contínua num espaço compacto assume o máximo e o mínimo.
- (a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- (b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
- (c) Se A e B são fechados disjuntos tal que $\forall p \in B, \text{dist}(p, A) > 0$, então $\text{dist}(A, B) > 0$.
- (d) Dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função considere o gráfico de f dado por $A = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$. Segue então que se o gráfico de f é fechado, f é contínua.
- (e) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ contínua tal que $f(0) = 1/2$ e $f(x) \rightarrow 1$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$. Segue então que f é limitada e assume um máximo global.
- (f) Seja X um subconjunto de \mathbb{R}^n e seja $a \in \overline{X}$ um valor aderente a X . Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua limitada. Segue então que existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

- (g) Sejam f, g funções contínuas que levam um espaço métrico X na reta real \mathbb{R} . Se $f(a) \neq 0 \neq g(a)$, para certo $a \in X$, segue então que $f(x) \cdot g(x) \neq 0$, numa vizinhança de a .
- (8) Exiba um homeomorfismo entre o intervalo $(-1, 1)$ e a reta real \mathbb{R} .
- (9) Considere a esfera unitária $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Seja $N = (0, 0, 1)$ o polo norte da esfera. Para cada $p \in \mathbb{S}^2, p \neq N$, trace a reta r passando por N e p . Seja $f(p)$ o ponto que r corta ou perfura o plano horizontal $\{z = 0\}$. Deduza que a aplicação $p \mapsto f(p)$ é um homeomorfismo, que leva $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ homeomorficamente a \mathbb{R}^2 .
- (10) Considere o disco unitário aberto $\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ e o plano complexo \mathbb{C} .
- (a) Deduza que \mathcal{D} e \mathbb{C} são homeomorfos.
- (b) Deduza que \mathcal{D} e \mathbb{C} não são conformemente equivalentes, isto é, não existe uma aplicação holomorfa $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ com inversa holomorfa $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$.
- (11) Lembre-se que a equação geral de uma reta ou círculo no plano complexo é da forma $\alpha z\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0$, onde $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}, |\beta|^2 > \alpha\gamma$.
- (a) Mostre que a aplicação $f(z) = 1/z$ é uma aplicação conforme que leva círculos ou retas em círculos ou retas, analisando separadamente os casos em que o círculo ou reta passa pela origem.
- (b) Mostre que a aplicação $\phi : z \mapsto \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a$, onde $a \in \mathbb{C}, r > 0$ deixa fixo todos os pontos do círculo C_a de raio r e centro a , e leva cada círculo C ortogonal a C_a em si mesmo.
Tal aplicação é chamada de inversão ou simetria ou reflexão com respeito ao círculo.
- (c) Estude as propriedades da reflexão ϕ com respeito ao círculo C_a de raio r e centro a .
Lembre que uma *equivalência conforme* ou *mapeamento conforme* entre dois abertos U e V do plano complexo é uma aplicação holomorfa $f : U \rightarrow V$ que possui uma inversa $g : V \rightarrow U$ holomorfa.
- (d) No exercício anterior mostre que quando $a = -i$ e $r = \sqrt{2}$, a aplicação ϕ , composta com a conjugação usual dos números complexos, seguida da rotação de $\pi/2$ no sentido

horário, chamada de ψ , fornece uma equivalência conforme entre o semi-plano $\mathbb{H}^2 = \{\Im z > 0\}$ (semiplano superior) e o disco unitário aberto $\mathcal{D} = \{|z| < 1\}$.

- (i) O que você pode dizer da imagem por ψ de cada semi-reta vertical em \mathbb{H}^2
 - (ii) O que você pode dizer da imagem por ψ de cada semi-círculo em \mathbb{H}^2 ortogonal a $\{\Im z = 0\}$?
 - (iii) O que você pode dizer da imagem por ψ de cada horociclo em \mathbb{H}^2 (círculo em \mathbb{H}^2 tangente ao eixo real ou reta em \mathbb{H}^2 paralela ao eixo real) ?
 - (iv) O que você pode dizer da imagem por ψ de cada círculo estritamente contido em \mathbb{H}^2 ?
- (12) (a) Deduza que se A é um convexo de \mathbb{R}^n e x_1, \dots, x_k são pontos de A , então, dados $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, então $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \in A$ (ou seja, toda combinação convexa de pontos de A pertence a A). Além disso, deduza que se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa então

$$f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_i)$$

- (b) Deduza que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin x_i \leq \sin\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)$$

se $0 < x_1 < \dots < x_n < \pi$.

- (c) Seja $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Defina: $I(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := -\sum_{i=1}^n \lambda_i \ln \lambda_i$, definindo $0 \ln 0 = 0$.

Deduza que

$$I(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \leq \ln n = I\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$$

- (13) Deduza que se A é um convexo de \mathbb{R}^n então $A + a$ é convexo, $a \in \mathbb{R}^n$. Deduza que se f é uma função convexa num aberto A de \mathbb{R}^n então $f(x+a) - f(x)$; $x, x+a \in A$ é uma função convexa.
- (14) Seja $\bar{P}(r, a)$, $a \in \mathbb{R}^n, r > 0$, um n -cubo em \mathbb{R}^n . Deduza que cada ponto de $\bar{P}(r, a)$ é uma combinação convexa dos vértices.

Nota cultural matemática:

Note que $h(z) = z + \bar{z}^n/n$, $n \in \mathbb{N}^*$ não é uma função holomorfa já que $h_{\bar{z}} = \bar{z}^{n-1} \neq 0$. Diferenciando-se $h(z)$ com respeito a z obtém-se que $h_{z\bar{z}} = 0$.

Isto leva ao conceito de funções e aplicações harmônicas que é fundamental na *Análise Complexa*, na *Teoria das Superfícies* e é claro, na *Análise Harmônica*.

Aplicações harmônicas de $U \subset \mathbb{C}$ no plano complexo \mathbb{C} :

Dizemos que $h : U \rightarrow \mathbb{C}$, $z := u + iv \mapsto h(z)$, é uma aplicação harmônica.

$$\varphi_{z\bar{z}} = \frac{\partial^2 h}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$$

Ou seja, $\Delta h := h_{uu} + h_{vv} = 0$, o *Laplaciano* de h é nulo; assim temos a noção usual de harmonicidade das variáveis complexas. Note que a se $f(z) := u(z) + iv(z)$, $u(z), v(z) \in \mathfrak{R}$ é holomorfa, então, sua *parte real* dada por $u(z) = \Re f(z) = (f(z) + \bar{f}(z))/2$, é *harmônica*, ou seja $(\Re f(z))_{z\bar{z}} = 0$, já que

$$(f(z))_{\bar{z}} = 0 = (\bar{f}(z))_z.$$

Uma relação importante entre s funções harmônicas e as funções holomorfas é que uma função harmônica definida num aberto simplesmente conexo U é a *parte real de uma função holomorfa*.

Funções harmônicas satisfazem um *princípio do máximo* que diz que “o máximo de uma função harmônica é atingido no bordo”.

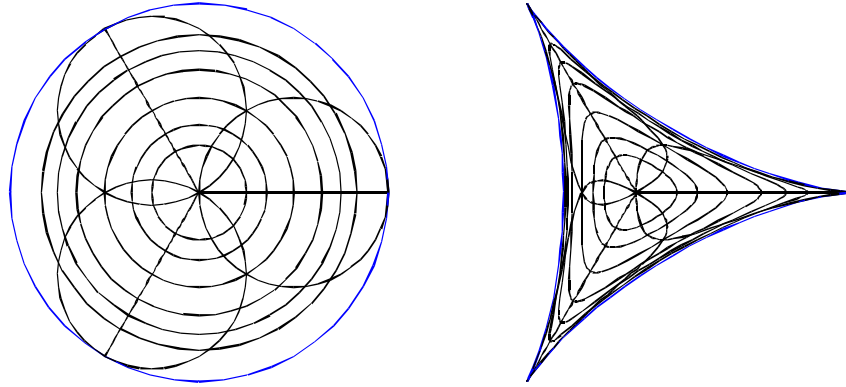
Um interessante resultado é o *teorema dos três círculos de Hadamard* que estabelece uma *propriedade de convexidade* para o módulo máximo de uma função holomorfa:

Seja $f(z)$ uma função holomorfa definida num aberto que contém o anel $\{0 < r_1 \leq |z| \leq r_2\}$. Seja $s = \frac{\ln r_1 - \ln r}{\ln r_2 - \ln r_1}$. Seja $M(r) = \|f\|_{|z|=r}$. Segue então que:

$$\ln M(r) \leq (1 - s) \ln M(r_1) + s \ln M(r_2)$$

A demonstração do teorema de Hadamard faz uso do princípio do máximo e do fato que para toda constante real α , a função $\alpha \ln |z| + \ln |f(z)|$ é harmônica fora dos zeros de $f(z)$.

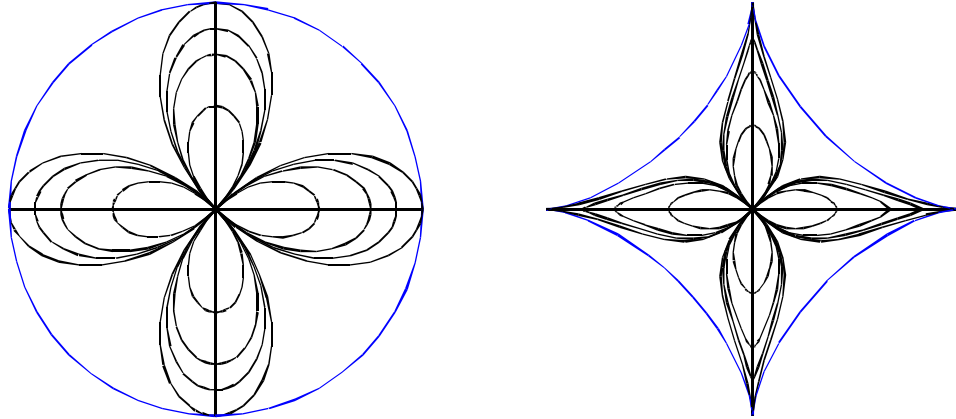
O teorema de Liouville diz que uma *aplicação harmônica limitada definida em todo \mathbb{C} é constante*. Tente deduzir isto. Logo, não existe



um difeomorfismo harmônico (com inversa harmônica) que leva o disco aberto $B_1(0)$ de raio 1 no plano complexo \mathbb{C} .

Por outro lado, vimos que a aplicação $h : B_1(0) \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto h(z) = z + \bar{z}^n/n$, $n \in \mathbb{N}^*$ é harmônica. Como também é univalente (injetiva) e aberta dizemos que $w = h(z)$ é um *mapeamento harmônico* de $B_1(0)$ sobre sua imagem, que vem a ser um *hipociclóide* com $n + 1$ *cúspides* inscrito no círculo $|w| = (n + 1)/n$. Quando $n = 2$ (três cúspides) obtemos o *deltóide*, quando $n = 3$ (quatro cúspides) obtemos o *astróide*.

Em seguida ilustramos o mapeamento harmônico do disco unitário no interior do deltóide, dado por, $z \mapsto z + \bar{z}^2/2$ e o mapeamento harmônico do disco unitário no interior do astróide, dado por, $z \mapsto z + \bar{z}^3/3$, sucessivamente.



Superfícies mínimas de \mathbb{R}^3 :

Uma função holomorfa f em U , exceto num conjunto de pontos isolados \mathcal{S} de U , tal que $\lim |f(z)| = \infty$, quando z tende à algum destes pontos isolados é chamado de função *meromorfa*. Cada ponto de \mathcal{S} é chamado de *pólo* de f . Por exemplo: a *função de Joukowski*: $J(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, possui um pólo na origem, daí é meromorfa em \mathbb{C} e holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Agora considere o espaço \mathbb{R}^3 munido do produto escalar usual \cdot : Dizemos que uma aplicação

$X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $z \mapsto X(z)$ é uma *imersão conforme*, se $X_x \cdot X_y = 0$, $X_x \cdot X_x = X_y \cdot X_y \neq 0$, $\forall z \in U$.

Seja N a *aplicação de Gauss Euclideana* (normal unitário) definida por $N = \frac{X_x \times X_y}{\|X_x \times X_y\|}$. O símbolo \times refere-se ao produto vetorial de \mathbb{R}^3 .

Superfícies $S = X(U)$ que *minimizam* área têm sido estudadas em vários contextos. Tais superfícies são *mínimas*: a *curvatura média* = semi-soma das *curvaturas principais* é nula.

Uma definição equivalente mais bem ajustada ao nosso enfoque é que a composta da aplicação normal de Gauss com a aplicação estereográfica Π do pólo norte da esfera unitária S^2 é uma função meromorfa; isto é $\Pi \circ N := g$ é meromorfa.

É possível mostrar que $X : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3, w \in U \mapsto X(w) = (x_1(w), x_2(w), x_3(w))$ é uma *imersão mínima conforme* $\iff X_{w\bar{w}} = 0$,

ou seja as coordenadas $x_1(w), x_2(w), x_3(w)$ são *funções harmônicas* da variável w .

Assim, é possível determinar uma imersão mínima conforme $X(w) = (x_1(w), x_2(w), x_3(w))$, em \mathbb{R}^3 usando a famosa *representação de Weierstrass* $(g(w), f(w) dw)$.

É preciso levar em conta que $g(w)$ a aplicação normal de Gauss é *meromorfa* e que as coordenadas da imersão são funções harmônicas, fazendo *integração complexa* e lembrando que *a parte real de uma função holomorfa é harmônica*:

$$X(w) = \left(\Re \int_{w_0}^w \frac{(1-g^2)f}{2} dw, \Re i \int_{w_0}^w \frac{(1+g^2)f}{2} dw, \Re \int_{w_0}^w fg dw \right)$$

Exemplos de superfícies mínimas de \mathbb{R}^3 : A família catenóide-helicóide.

Neste caso $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $g(w) = w$, $f(w) dw = e^{i\theta}/w^2 dw$, quando $\theta = 0$, obtemos o catenóide $X_0(w)$, quando $\theta = \pi/2$, obtemos o helicóide $X_{\pi/2}(w)$:

Em geral $X_\theta(w) = \cos \theta X_0(w) + \sin \theta X_{\pi/2}(w)$ devido a representação de Weierstrass dada por

$$X_\theta = \left(\Re \int_1^w \frac{(\frac{1}{\zeta^2} - 1)e^{i\theta}}{2} d\zeta, \Re i \int_1^w \frac{(\frac{1}{\zeta^2} + 1)e^{i\theta}}{2} d\zeta, \Re \int_1^w e^{i\theta}/\zeta d\zeta \right)$$

Tal família é constituída de superfícies *isométricas*, mas não congruentes, e é chamada de *associada*. O catenóide é chamado de *conjugado* ao helicóide. A métrica é dada por $ds^2 = (1 + 1/|w|^2)^2 |dw|^2/4$ e note que não depende de θ (caracterizando que a família é isométrica). Claro que o catenóide *não é congruente ao helicóide*; isto é, não existe um *movimento rígido do espaço* (leia-se, rotações e translações) que leva o catenóide no helicóide. Acima e abaixo, ilustramos esta família, começando pelo desenho do catenóide e terminando no desenho do helicóide, feitos usando o MAPLE.

