LISTA 7 DE ANÁLISE REAL 2011

RICARDO SA EARP

Diferenciabilidade de funções reais de uma variável real

(1) Seja

$$f(x) = \begin{cases} x \cot x \quad \text{se } 0 < |x| < \pi \\ 1 \quad \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Deduza que
(a) f é de classe C^2.
(b) f admite um máximo global.
(c) O gráfico de f é côncavo.
(d) O gráfico de f é completo.
(e) Esboce o gráfico de f.

(2) Deduza que

$$\cosh \pi x > \frac{\sinh \pi x}{\pi x}, \quad \text{se} \quad x > 0.$$

(3) Deduza que a função

$$f(x) = \begin{cases} \pi x \coth \pi x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

é de classe C^2 e convexa. Esboce o gráfico de f.

(4) Seja $n \in \mathbb{N}$. Considere a função $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = nx\,(1-x^2)^n$.
Determine os pontos críticos de $f_n(x)$, estude o crescimento e decrescimento de $f_n(x)$. Esboce o gráfico de $f_n(x)$ (definida no intervalo $[0,1]$), determinando o valor máximo global.

(5) Esboce escrevendo *todos os detalhes* o gráfico de $y = (1-x)\,\mathrm{e}^x$, e mostre a desigualdade

$$\mathrm{e}^x < \frac{1}{1-x}, \; x < 1, \; x \neq 0$$

(6) Se $C_0 + \dfrac{C_1}{2} + \cdots + \dfrac{C_{n-1}}{n} + \dfrac{C_n}{n+1} = 0$, deduza que

$$C_0 + C_1 x + \cdots C_{n-1}x^{n-1} + C_n x^n = 0$$

tem pelo menos uma solução entre 0 e 1.

(7) Seja $f(x)$ uma função contínua para $x \geqslant 0$ e diferenciável para $x > 0$ com $f(0) = 0$. Assuma que $f'(x)$ seja crescente. Deduza que a função $\dfrac{f(x)}{x}$ é crescente para $x > 0$.

(8) Considere a função $f(x) = \dfrac{\log x}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$. Estude monotonicidade de f (crescimento e decrescimento), e deduza que $5^{\sqrt{6}} < 6^{\sqrt{5}}$.

(9) Considere a função $f(x) = e^x - x^2 - x$. Com a ajuda moderada do MAPLE, estude o comportamento da função (análise da primeira e segunda derivadas, etc...), esboçando o seu gráfico.

(10) Seja a e b dois números reais não nulos distintos. Estude a monotonicidade da função $f(x) = \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}, \quad x > 0$.

(11) Seja f uma função real duas vezes diferenciável definida num intervalo aberto I. Seja $a \in I$. Deduza que

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$

(12) Seja $y = f(x)$ uma função positiva, crescente, duas vezes diferenciável no intervalo (x_0, x_1). Suponha que para certo $A > 0$, y satisfaça a desigualdade diferencial

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \leqslant \frac{1}{y(1+y'^2)^{1/2}} + \frac{A}{y^2(1+y'^2)}$$

(a) Mostre que a função

$$\frac{1}{2}\log(1+y'^2) - \log y + \frac{A}{y}$$

é decrescente em (x_0, x_1). Seja $\varepsilon > 0$. Deduza que existem constantes $b > 0$ e c tal que

$$y(x) < c\,e^{bx}, x \in (x_0 + \varepsilon, x_1)$$

(13) Calcule o limite

$$\lim_{a \to 0} \frac{a\pi \coth(a\pi) - 1}{2a^2}$$

(14) Calcule os limites abaixo.

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(\cos ax)}{\log(\cos bx)} = (a/b)^2.$

(b) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x-\sin x}{(x\sin x)^{3/2}} = \dfrac{1}{6}.$

(c) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^x - x}{1-x+\log x} = -2.$

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\cot x - 1}{x^2} = \dfrac{-1}{3}.$

(e) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log(a+b\,\mathrm{e}^x)}{\sqrt{a+bx^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{b}}$

(f) $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\log x}{(1+x)^2} - \log\left(\dfrac{x}{(1+x)}\right)\right) = 0.$

(g) $\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\sin x} = 1.$

(15) Seja $n \in \mathbb{N}$. Considere a função $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = nx\,(1-x^2)^n$.

(a) Calcule a_n o ponto de máximo global de $f_n(x)$, $x \in [0,1]$. Calcule o valor máximo global $f_n(a_n)$.

(b) Seja a_n o ponto de máximo global de $f_n(x)$. Deduza que dado $0 < a < 1$, existe $N = N(a)$ tal que para $n \geqslant N$ então $a_n < a$. Explicite N em função de a.

(c) Discuta a existência ou inexistência dos limites $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f_n(a_n)}{na_n}$, e $\lim_{n\to\infty} f_n(a_n)$, calculando-os, caso os limites existirem (finito ou infinito).

(16) Seja $f_n(x) = n^\alpha x^k e^{-n^k x}$, $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Considere os casos $k > 1$, $k = 1$, $0 < k < 1$, separadamente.

(i) Estude o comportamento de f_n: monotonicidade, convexidade, concavidade, retas assíntotas, comportamento perto de 0 e no infinito.

(ii) Determine os valores máximos e mínimos globais de f_n, se existirem.

(iii) Esboce o gráfico de $f_n(x)$, em cada caso.

(iv) Estude a convergência pontual e uniforme da sequência de funções $\{f_n\}$ em $(0,+\infty)$, conforme as relações entre os parâmetros α e k.

(b) Faça o mesmo estudo do item anterior para $k = 0$ e $k < 0$.

(17) Seja $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções de classe C^1. Dê uma condição suficiente sobre a sequência das derivadas $\{f_n'(x)\}$ para que tal família seja equicontínua.

(18) Responda verdadeiro ou falso. Caso verdadeiro, deduza, caso falso dê um contraexemplo.

(a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$. Segue então que existe c, tal que $f'(c) = 0$.

(b) Seja $f(x) \geqslant 0$ uma função suave definida em $[0,\infty)$, Assuma que $f(x) > 0$, para $x > 0$. Assuma que $\lim x^2 \log f(x) \to -1$, quando $x \to 0^+$. Segue que $f(x)$, assim como todas as suas derivadas são nulas na origem.

(c) Existe um valor k, para o qual a equação

$$x^3 + x^2 - 5x + k = 0$$

tem dois zeros no intervalo $(0,1)$.

(d) A função $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ restrita ao intervalo $[0,1]$ possui um máximo M_n satisfazendo $0 < M_n \leqslant \dfrac{1}{2(n+1)}$.

(e) Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitada de classe C^2 é necessariamente de classe C^3.

(f) Seja f uma função real contínua definida num intervalo fechado $[a,b]$ e duas vezes diferenciável no aberto (a,b). Assuma que $f(a) = f(b) = 0$ e que $f''(x) \leqslant 0$ em (a,b). Segue então que $f(x) \geqslant 0$ em $[a,b]$. Interprete geometricamente.

(g) Se f uma função real contínua num intervalo fechado $[a,b]$ e duas vezes diferenciável no aberto (a,b), satisfazendo $f''(x) \leqslant 0$ em (a,b), então

$$f(x) \geqslant f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

em (a,b).
Interprete geometricamente.

(h) Seja f uma função real contínua definida num intervalo fechado $[a,b]$ e duas vezes diferenciável no aberto (a,b). Assuma que $f''(x) \geqslant -k$, $k > 0$. Deduza que

$$f(x) \leqslant f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} + \frac{k(b-x)(x-a)}{2}$$

Interprete geometricamente o resultado. *Sugestão*: Considere a função $h(x) = \dfrac{k(b-x)(x-a)}{2} - f(x)$.

(19) Seja $f(x)$ uma função duas vezes diferenciável num intervalo (a, b).

(a) Deduza que $\forall x, y \in (a, b)$

$$f(x) + f(y) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f''(c)\left(\frac{y-x}{2}\right)^2$$

para $c \in (a, b)$. Interprete o resultado *via-à-vis* a convexidade.

(b) Deduza que f é convexa $\iff f''(x) \geqslant 0, \forall x \in (a, b)$.

Sugestão: 1) Assuma a convexidade. Deduza que se existe t tal que $f''(t) < 0$ então existem h e δ positivos tal que $f'(t+u) - f'(t-u) < -\delta u$, para $0 < u \leqslant h$. Integre esta equação com respeito a u entre 0 e h e obtenha uma contradição.

2) Assuma que $f''(x) \geqslant 0$ em (a, b). Seja $a = \sum_i \lambda_i x_i$ ($\sum_i \lambda_i = 1$) e seja $x = x_i$. Aplique a fórmula de Taylor, resto de Lagrange, para concluir.

(c) Quando $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ tem-se que f é estritamente convexa. Deduza isto e deduza também que a recíproca deste fato não é verdadeira.

Sugestão: Seja α, β pontos de (a, b) e seja $c := t\alpha + (1-t)\beta, 0 < t < 1$. Considere $A := tf(\alpha) + (1-t)f(\beta) - f(c)$. Considerando α e c escreva a *fórmula de Taylor de ordem* 2 (resto de Lagrange)para $f(\alpha) - f(c)$. Idem para $f(\beta) - f(c)$. Observe que $A = t(f(\alpha) - f(c)) + (1-t)(f(\beta) - f(c))$, e que $t(\alpha - c) + (1-t)(\beta - c) = 0$. Obtenha uma expressão para A que permite concluir que $A > 0$ se $f'' > 0$ em (a, b).

(20) Seja f uma função real definida num intervalo I de comprimento $2l$. Assuma que f é duas vezes diferenciável em I. Além disso, suponha que f e f'' sejam limitadas. Seja $M_0 = \sup_{x \in I} |f(x)|$ e $M_2 = \sup_{x \in I} |f''(x)|$.

(a) Seja x_0 um ponto interior de I e seja λ um número real positivo tal que o intervalo $J = J(x_0, \lambda) = [x_0 - \lambda, x_0 + \lambda]$ seja contido no interior de I. Mostre que

$$|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{\lambda} + \lambda M_2, \qquad \forall x \in J$$

Além disso, mostre que se f' é limitada em I, tem-se que

$$\sup_{x\in I}|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{\lambda} + \lambda M_2,$$

(b) Conclua que se $l > \sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}$, tem-se que $M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$.

(c) Estude o caso $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{2}$ no intervalo $[-1,1]$.

(21) Seja $f(x)$ uma função duas vezes diferenciável em $(0,\infty)$. Assuma que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Assuma ainda que $f''(x)$ seja limitada em $(0,\infty)$. Deduza que $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Exiba um contraexemplo quando $f''(x)$ não for limitada.

(22) Seja $u(x)$ uma função duas vezes diferenciável num intervalo (a,b). Sejam $g(x)$ uma função limitadas em (a,b).
Considere o operador linear L definido por

$$L[u] := u'' + g(x)u'$$

(a) Deduza que se $u(x)$ satisfaz a desigualdade diferencial estrita $L[u] > 0$, então u não pode assumir um máximo local em (a,b).

(b) Seja $c \in (a,b)$. Encontre uma função elementar suave $z(x)$ em toda reta $\mathbb{R}$, satisfazendo
   (i) $z(x)$ é estritamente crescente em (a,b) e $z(c) = 0$.
   (ii) $L[z] > 0$ em (a,b).

(c) Idem, se $Q[u] = u'' + g(x)u$, encontre $z(x)$ satisfazendo: $z(x)$ é estritamente crescente em (a,b), $z(c) = 0$ e $L[z] > 0$ em (a,b).

(d) Assuma agora que u e w (duas vezes diferenciáveis) são soluções não triviais ($u \not\equiv 0, w \not\equiv 0$) da equação linear

$$L[u] + h(x)u = 0,\ L[w] + h(x)w = 0$$

Deduza que entre dois zeros consecutivos da função $w(x)$, a função $u(x)$ só pode assumir no máximo um zero simples. Este é um *teorema de comparação de Sturm*.

Sugestão: Assuma que $w(a) = w(b) = 0$ e que $w > 0$ em (a,b). Considere a função $v(x) = \dfrac{u(x)}{w(x)}$. Verifique que v satisfaz a equação de segunda ordem

$$v'' + \left(2\frac{w'}{w} + g\right)v' = 0$$

(23) Vamos trabalhar com funções suaves cujos gráficos concordam suavemente com semi-retas ou segmentos de reta.

(a) Construa uma função $f \in C^\infty$ bijetiva, estritamente decrescente, satisfazendo

(i) $f(0) = 1$ e $f(1) = 0$.

(ii) $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0, \quad n = 1, 2 \ldots$

(b) A idéia é construir uma função $F : [0,1] \overset{C^\infty}{\longrightarrow} [0,1]$, satisfazendo

(i) $F(0) = 1, F(1) = 0$.

(ii) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, F^{(k)}(\frac{1}{n}) = 0$.

(iii) $\forall k \in \mathbb{N}^*, F^{(k)}(0) = F^{(k)}(1) = 0$.

Sugestão: Considere a seqüência $\{b_n, \quad n > 0\}$ definida por: $b_1 = 0, \quad b_n = 1 - \mathrm{e}^{-n}, \quad n > 1$. Tome $g_n : \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \to [b_n, b_{n+1}]$, definida por

$g_n(x) = b_n + (b_{n+1} - b_n) f\left(\frac{x - 1/(n+1)}{1/n - 1/(n+1)}\right)$. Finalmente, verifique que F pode ser definida por $F(0) = 1, \quad F(x) = g_n(x), \ \forall\, x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$.

(c) A idéia é construir uma função real suave F definida em $\mathbb{R}^2$, que toma o valor 1 num disco aberto de raio 1 centrado na origem e vale 0 para todo ponto fora do disco de raio 2 centrado na origem.

Sugestão: Considere a função
$\alpha(x) = \mathrm{e}^{-1/x}, \quad x > 0, \alpha(x) = 0, \quad x \leqslant 0$. Considere $h(x) = \alpha(1-x)\alpha(x)$. Considere f(x)= $\dfrac{1}{\int_{-\infty}^{1} h(x)\,\mathrm{d}x} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} h(t)\,\mathrm{d}t$.

Verifique que $F(x,y) = f\left(\dfrac{4 - x^2 - y^2}{3}\right)$, satisfaz a propriedade requerida.

(d) Para cada par de números reais $a < b$ considere a função $h_{a,b} : [a,b] \to \mathbb{R}^+$, dada por

$$h_{a,b} = \mathrm{e}^{\dfrac{-1}{(x-a)^2}} \cdot \mathrm{e}^{\dfrac{-1}{(x-b)^2}}$$

(i) Mostre que $h_{a,b}$ é uma função de classe C^∞ satisfazendo $h_{a,b}^{(k)}(a) = h_{a,b}^{(k)}(b) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Além disso, usando indução, mostre que

$$h_{a,b}^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{(x-a)}, \frac{1}{(x-b)}\right) \cdot \mathrm{e}^{\dfrac{-1}{(x-a)^2}}\,\mathrm{e}^{\dfrac{-1}{(x-b)^2}} \qquad \forall x \in [a,b]$$

onde $P_k \in \mathbb{R}[X,Y]$ é um polinômio real com coeficientes inteiros que não dependem nem de a nem de b. Mostre também que

$$\lim_{|a-b| \to 0} \sup\{|h_{a,b}^{(k)}(x)|; \quad x \in [a,b]\} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

(24) Seja $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Seja

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x^{1/n}}{(1-x)^{1/n}}, & \text{se } 0 \leqslant x < 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

(a) Deduza que f é contínua e que $f \in C^{\infty}(0,1)$.
(b) Estude o comportamento de f em $(0,1)$, quanto à monotonicidade (crescimento ou decrescimento de f).
(c) Estude o comportamento de f' e f'' perto de 0 e 1, respectivamente, calculando os limites laterais nestes pontos, finitos ou infinitos, caso existirem.
(d) Usando o MAPLE calcule os seguintes limites (finito ou infinito), caso, existirem:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f''(x)}{(1 + f'^2(x))^{3/2}}$$
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f''(x)}{(1 + f'^2(x))^{3/2}}$$

(e) Estude o sinal da segunda derivada e mostre que existe pelo menos um ponto de inflexão x_0 em $(0,1)$, que é um zero da segunda derivada.

Vamos ver que neste ponto $(x_0, f(x_0))$ do gráfico a concavidade do gráfico muda; ou seja, neste ponto o gráfico muda de *convexo* a *côncavo* (percorrendo o gráfico no sentido crescente do eixo dos x):
(f) Estudando o numerador da segunda derivada, mostre que o ponto x_0 encontrado no item anterior é o único ponto do

intervalo $(0, 1)$ onde a segunda derivada se anula; assim, este ponto x_0 é o único ponto onde a concavidade muda.

(g) Para $n = 2$ encontre explicitamente tal x_0, referido e determinado no item anterior.

(h) Fazendo uso do MAPLE, esboce o gráfico de f, corroborando os seus cálculos e análises anteriores.