ANÁLISE REAL-2002.2–Lista 8

Professor: Ricardo Sá Earp

1) Seja X um compacto. Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções contínuas em X que converge pontualmente para uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$. Assuma que $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots$, e cada $x \in X$. Mostre que $f_n \xrightarrow[X]{u} f$, i.e f_n converge uniformemente à f em X. Mostre com um exemplo que a hipótese de compacidade é necessária.
2) Mostre que toda seqüência de funções limitadas que é uniformemente convergente, também é uniformemente limitada.
3) Seja K um conjunto compacto. Defina uma métrica no conjunto $C(K)$ das funções contínuas definidas em K, de modo que uma seqüência f_n converge à f em $C(K)$ se e somente se f_n converge uniformemente à f em K. Discuta a completude deste espaço métrico. Discuta a noção de subconjunto fechado em $C(K)$. Discuta a noção de subconjunto compacto deste espaço, relacionando com o teorema de Arzelà- Ascoli.
4) Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções eqüicontínuas em um conjunto compacto K que converge pontualmente em K. Mostre que que f_n converge uniformemente em K.
5) Seja X um conjunto e seja $\{f_n\}$ um seqüência de funções definidas em X. Mostre que $f_n \xrightarrow{u} f$, uniformemente em X, se e somente se

$\lim_{n\to\infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = 0$, para toda seqüência $\{x_n\}$ em X. Utilize este resultado para mostrar que $f_n(x) = nx(1-x)^n, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$ é uma seqüência de funções contínuas que converge pontualmente à 0, mas a convergência não é uniforme. Seria tal seqüência limitada no espaço métrico $C([0,1])$? O que isto tem a ver com o teorema de Arzelà- Ascoli ?

6) Mostre que a seqüência de funções reais $f_n(x) = \sin(x + n^3 + e^{n^2})$ contém uma subseqüência que converge uniformemente em qualquer subconjunto compacto

$K \subset \mathbb{R}$. Você poderia apresentar uma família de exemplos bem mais gerais que contenha este exemplo ?

7) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e seja $\mathcal{F}$ uma família do conjunto de todas as funções$f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1 com as primeiras derivadas parciais uniformemente limitadas em cada compacto $K \subset \Omega$. Mostre que $\mathcal{F}$ é equicontínuo. *Sugestão*: Mostre que, dada uma bola compacta $K = \overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$, e M_K tal que

$$|f_{x_i}(x)| \leqslant M_K, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$\forall f \in \mathcal{F}$, então

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \sqrt{n} M_K \|x - x_0\|$$

8*) Discuta amplamente o conceito de *família normal* das Variáveis Complexas, relacionando com o teorema de Arzelà- Ascoli e com o *teorema de Montel para funções meromorfas*. Discuta o *princípio de Bolzano- Weierstrass* neste contexto. Além disso, discuta como o *princípio de compacidade* interfere na demonstração do *teorema de uniformização de Riemann*.

9) Seja $\mathcal{F}$ a família de funções $\{f : B_1(0) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ de classe C^∞, satisfazendo

$$|f(z)| \leqslant \frac{c_0}{1 - |z|}$$
$$|f^{(k)}(z)| \leqslant \frac{c_k(1 + |z|)}{1 - |z|}$$
$$c_0, c_k > 0, k = 1, 2 \ldots$$

Mostre que toda seqüência $\{f_n\}$ de funções em $\mathcal{F}$, contém uma subseqüência $\{f_{n_j}\}$ uniformemente convergente em todo compacto $K \subset B_1(0)$, à uma função $f \in \mathcal{F}$.

Pergunta adicional: Como o enunciado deste problema poderia ser sob um ponto de vista teórico consideravelmente simplificado-sem alterar a força da conclusão- no contexto de *funções holomorfas* definidas na bola unitária $B_1(0) \subset \mathbb{C}$?

10) Seja Ω um domínio de $\mathbb{R}^2$. Considere a *equação da superfície mínima* dada por

$$(*) \qquad (1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega$$

Seja u_n uma seqüência de funções de classe C^3 que satisfazem a equação $(*)$. Assuma que em todo compacto $K \subset \Omega$, u_n é uma seqüência de funções uniformemente limitada. Assuma que as derivadas parciais de cada u_n dependem em todo ponto $p \in \Omega$- em valor absoluto- apenas da limitação da altura de cada u_n e da distância de p ao bordo de Ω. Mostre que existe uma subseqüência u_{n_j} que é uniformemente em todo compacto $K \subset \Omega$, convergindo à uma função u que satisfaz a equação $(*)$ da superfície mínima em Ω.

Você saberia deduzir uma propriedade semelhante para uma seqüência funções harmônicas uniformemente limitadas em compactos de Ω ?

BIBLIOGRAFIA SUCINTA

1) Elon Lages Lima. *Curso de Análise Volume 1.* Projeto Euclides, 1995.

2) Emil Artin. *The Gamma Function.*Holt, Rinehart and Winson, Inc. 1964.

3) Chaim Samuel Hönig. *Aplicações da topologia à análise.* Projeto Euclides, 1976.

4) Henri Mascart e Marius Stoka. *Fonctions d'une Variable Réele.* PUF, 1986.

5) G. H. Hardy, J. E. Littlewood e G. Pólya. *Inequalities.* Cambridge Press , 1973.

6) J. Rivaud. *Séries; équations différentielles.* Vuibert, 1973.

7) M. Spivak, *Calculus.* Dois volumes. Ed. Reverté, Barcelona, 1970.

8) M. Spivak, *Calculus on manifolds.* Benjamin, N. York, 1965.

9) Nicholas D. Kazarinoff. *Analytic Inequalities.* Holt, Rinehart and Winson, Inc. 1961.

10) Ralph P. Boas, Jr. *A Primer of Real Functions.* Math. Assoc. of Amer. John Wiley and Sons, Inc. 1960.

11) Walter Rudin. *Princípios de Análise Matemática.* Livro Técnico, N, 1971.

12) Srishti D. Chatterji. *Cours d'Analyse 1,2.* Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1997.

13) Tom M. Apostol. *Calculus, vol. II* (second edition). J. Wiley & Sons, 1969.