LISTA 8 DE ANÁLISE REAL 2009

RICARDO SA EARP

Integrabilidade

(1) Seja f uma função contínua no intervalo $[0, \infty)$. Para $x > 0$, colocamos

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad F(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$$

(a) Mostre que $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = f(0) := F(0)$.

(b) Mostre que $F(x)$ é diferenciável e que $F'(0) = \dfrac{f'(0)}{2}$.

(2) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{\sqrt{n^2 - p^2}}{n^2}$. Resposta: $\pi/4$.

(3) (*lema de Riemann-Lebesgue*) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função Riemann integrável. Deduza que

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^b f(x) \sin(tx)\ \mathrm{d}x = 0$$

(4) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que sua derivada seja limitada. Deduza que f é absolutamente contínua, logo de variação limitada. Exiba um exemplo de uma função diferenciável num intervalo fechado que não é de variação limitada.

(5) Vamos agora examinar de um outro ponto de vista as identidades

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \qquad \ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

que já sabíamos deduzir via as séries de Tayor de $\arctan z$ e $\ln(1+z)$, na origem. Considere a integral

$$I(n) = \int_0^{\pi/4} \tan^n \theta\,\mathrm{d}\theta \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(a) Fazendo integração por partes mostre que

$$
\begin{aligned}
I(2n) &= \int_0^{\pi/4} \tan^{2n-2}\theta\,(\sec^2\theta - 1)\,\mathrm{d}\theta \\
&= -I(2n-2) + \int_0^{\pi/4} \tan^{2n-2}\theta \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= -I(2n-2) + \frac{1}{2n-1} \\
&= \frac{1}{2n-1} - \left(-I(2n-4) + \frac{1}{2n-3}\right) \\
\cdots \\
&= \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-5} - + \cdots + (-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}\frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Deduzindo que

$$\left|\frac{\pi}{4} - \sum_1^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\right| = I(2n) \tag{1}$$

Analogamente, mostre que

$$\left|\frac{1}{2}\ln 2 - \sum_1^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k}\right| = I(2n+1) \tag{2}$$

(b) Mostre que $I(n)$ decresce estritamente quando n cresce, concluindo que

$$I(n) < \frac{1}{2(n-1)} \qquad I(n-2) > \frac{1}{2(n-1)}$$

portanto

$$\frac{1}{2(n+1)} < I(n) < \frac{1}{2(n-1)}$$

(c) Aplique o resultado acima nas equações (1) e (2) para obter as estimativas

$$\frac{1}{2(2n+1)} < \left| \frac{\pi}{4} - \sum_{1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \right| < \frac{1}{2(2n-1)}$$

$$\frac{1}{2(n+1)} < \left| \ln 2 - \sum_{1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| < \frac{1}{2n}$$

(6) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e seja $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função localmente integrável. Deduza que

(a) Se $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha} f(x)$ existe e é não nulo, então $\int\limits_{a}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge se e somente se $\alpha > 1$.

(b) Se $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha} f(x) = 0$ e se $\alpha > 1$ então $\int\limits_{a}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ é absolutamente convergente.

(c) Exemplifique as situações dos itens anteriores.

(d) Deduza que para que a integral imprópria $\int\limits_{a}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converja é suficiente que exista uma sequência $\{x_n\}$ com $x_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ tal que a série $\sum \int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ seja convergente et tal a sequência que $\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ tenda a zero.

(e) (*Teste da integral*) Assuma que $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ seja decrescente e positiva ($f \geqslant 0$). Deduza que para que a integral imprópria $\int\limits_{a}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, see somente se a série $\sum\limits_{n \geqslant a} f(n)$ converge.

(f) Exiba exemplos que ilustrem a situação da afirmação anterior.

(7) (*Derivação sob o símbolo da integração I*) Seja I um intervalo aberto da reta. Seja $f : [a, b] \times I \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ exista e seja contínua em $[a, b] \times \mathbb{R}$.

Deduza que a função $F(x) := \int\limits_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}x$ é de classe C^1 e vale que

$$F'(x) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,\mathrm{d}t,\ \forall x \in I$$

(8) (*Derivação sob o símbolo da integração II*) Seja I um intervalo aberto da reta. Seja $f : [a,b] \times I \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ exista e seja contínua em $[a,b] \times \mathbb{R}$. Deduza que a função $H : [a,b] \times [a,b] \times I \to \mathbb{R}$ dada por $H(u,v,x) := \int\limits_u^v f(t,x)\,\mathrm{d}x$ é de classe C^1. Calcule $\dfrac{\partial H}{\partial x}(u_0,v_0,x_0)$, $\dfrac{\partial H}{\partial u}(u_0,v_0,x_0)$ e $\dfrac{\partial H}{\partial v}(u_0,v_0,x_0)$

(9) (*Derivação sob o símbolo da integração III*) Nas hipóteses do item anterior, se $u : I \to [a,b]$ e $v : I \to [a,b]$ são funções diferenciáveis, deduza que $H(x) := \int\limits_{u(x)}^{v(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}x$ é diferenciável em I e vale que

$$H'(x) = v'(x)f(v(x),x) - u'(x)f(u(x),x) + \int\limits_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,\mathrm{d}t$$

Conclua que

(10) (*Fubini-versão bem particular*) Se $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ uma função contínua então

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(t,x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$$

(11) Considere a função real dada

$$f(x) = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

(a) Mostre que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e que

$$f'(x) = \int_0^1 e^{-x(1+t^2)}\,dt$$

Além disso mostre que $f(x) \to 0$, quando $x \to \infty$ e que $f(x) \to \infty$ quando $x \to -\infty$.

(b) Considere $g(x) = f(x^2)$. Mostre que $g'(x) = -2\,e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$. Deduza que

(c) $g(x) + \left(\int_0^x e^{(-t^2)}\,dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}$, e portanto $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(12) Mostre que

$$\int_a^b \frac{1}{(t^2+1)^{n+1}}\,dt = \frac{1}{2n}\frac{t}{(t^2+1)^n}\Bigg]_a^b + \frac{2n-1}{2n}\int_a^b \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt$$

(13) Calcule

(a)

$$\int_0^1 \frac{1}{t^4+1}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\pi}{2}$$

(b)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 t\,dt = \frac{3\pi}{16}$$

(c)

$$\int_a^x \frac{1}{\sin t}\,dt = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) - \ln\left(\tan\frac{a}{2}\right)$$

(d)

$$\int_a^x \frac{1}{\sin^4 t}\,dt = \left(\frac{1}{3\tan^3 a} - \frac{1}{3\tan^3 x}\right) + \left(\frac{1}{\tan a} - \frac{1}{\tan x}\right)$$

(e) (*Fórmula de Wallis*) Seja $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt$. Obtenha uma relação de recorrência entre I_n e I_{n-1}, calculando I_{2n} e I_{2n+1}.

(14) Calcule

$$\int_a^b \frac{1}{t}\sqrt{\frac{1+t}{t}}\,\mathrm{d}t \qquad (0 < a < b)$$

(15) Estude a convergência das integrais impróprias

(a)

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y$$

(b) Será a integral convergente para $x > 0$?

(c) Será a integral (ou seja $\varphi(x)$) *uniformemente convergente* para
$x > 0 \quad ?$

(d) Será a integral (ou seja $\varphi(x)$) *uniformemente convergente* para
$x > x_0 \quad \text{com } x_0 > 0 \quad ?$

(e)

$$\varphi(x) = \int_1^\infty \frac{1}{y^{1+x}}\,\mathrm{d}y$$

(f) Será a integral (ou seja $\varphi(x)$) *uniformemente convergente* para
$x > 0 \quad ?$

(g) (*Integrais de Bertrand*)

$$\int_2^\infty \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$$

onde $\alpha > 1$; ou $\alpha = 1$, $\beta > 1$. Resposta: Convergente.

(h) O que você pode dizer da série

$$\sum_2^\infty \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$$

quando $\alpha > 1$, ou $\alpha = 1$, $\beta > 1 \quad ?$

(i)

$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t,$$

Resposta: $\alpha > 1$ (absolutamente convergente), $\alpha = 1$ (convergente), $\alpha > 0$ (convergente).

(j) (*Integrais de Fresnel*)

$$\int_0^\infty \sin t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}, \qquad \int_0^\infty \cos t^2 \,\mathrm{d}t$$

Resposta: Convergente.

(k)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \pi\, \mathrm{e}^{-\alpha}, \qquad \alpha > 0$$

(l) É permissível a derivação sob o símbolo da integração com respeito a α ? Você precisa justificar a convergência uniforme (mas, não convergência absoluta) da integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x\,!!$$

(m)

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \qquad 0 < a < 1$$

(16) Mostre que

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^\pi \mathrm{e}^{-R\sin\theta} \,\mathrm{d}\theta = 0$$

Nota: Na verdade, $\displaystyle\lim_{R\to\infty} R \int_0^\pi \mathrm{e}^{-R\sin\theta} \,\mathrm{d}\theta = 2.$

(17) (*Função Gamma*) Considere as funções

$$\Gamma_1(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} \,\mathrm{d}t, \quad \Gamma_2(x) = \int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} \,\mathrm{d}t$$

(a) Serão as integrais acima uniformemente convergentes $\forall x \in \mathbb{R}^+$?

(b) Serão as integrais acima uniformemente convergentes em qualquer intervalo $[a, b], a > 0$?

(c) Mostre, exibindo rigorosamente os detalhes, que a função Gamma dada por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{z-1} \,\mathrm{d}t$$

é infinitamente diferenciável em $(0, \infty)$ e que

$$\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, (\ln t)^k\, t^{z-1} \,\mathrm{d}t$$

(d) Mostre a relação funcional

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

deduzindo que $\Gamma(n+1) = n!$.

(18) Estude a função Beta dada por

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t$$

mostrando que

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad B(p,q) = B(q,p) \quad p > 0, q > 0$$

Nota: Sucede do que foi feito que

$$\int_0^{\pi/2} (\cos x)^{\alpha-1}(\sin x)^{\beta-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\alpha/2)\Gamma(\beta/2)}{2\Gamma((\alpha+\beta)/2)}$$

(19) Investigação: Pesquise sobre as desigualdades integrais de Hölder e de Cauchy-Schwarz.