LISTA 8 DE ANÁLISE REAL 2010

RICARDO SA EARP

Compacidade, conexidade e continuidade em espaços métricos

(1) Deduza as afirmações abaixo:
   (a) Seja A um conjunto limitado não compacto de $\mathbb{R}$. Segue então que existe uma função contínua $f : A \to \mathbb{R}$ que não é limitada e existe $g : A \to \mathbb{R}$ limitada, mas o $\sup\limits_{x} f(x)$ não é atingido.
   (b) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ contínua tal que $f(x) \to 0$ quando $\|x\| \to \infty$. Segue então que f assume um máximo global.
   (c) Todo conjunto infinito limitado de $\mathbb{R}^n$ possui um ponto de acumulação.
   (d) Toda sequência limitada de $\mathbb{R}^n$ possui um valor aderente.
   (e) Seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada em $\mathbb{R}^N$ tal que toda subsequência converge para o mesmo ponto a de $\mathbb{R}^N$. Segue então que $x_n \to a$, quando $n \to \infty$.

(2) Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$. Definimos:
   $f(x) := \operatorname{dist}(x, A) = \inf\limits_{y \in A} \|x - y\|, \quad x \in \mathbb{R}^n$
   que se chama de distância de x ao conjunto A. Deduza:
   (a) f é Lipschitz, logo uniformemente contínua em $\mathbb{R}^n$.
   (b) Dê uma caracterização da aderência $\overline{A}$ de A em termos de $f(x)$.
   (c) Deduza que para $t > 0$ o conjunto $V_t(A) = \{x; \operatorname{dist}(x, A) < t\}$ é uma vizinhança de A e de $\overline{A}$.
   (d) Dados dois conjuntos A, B de $\mathbb{R}^n$ defina $\operatorname{dist}(A, B)$, a distância de A a B. Conclua que se A é compacto e B é fechado e $A \cap B = \emptyset$, então $\operatorname{dist}(A, B) > 0$. Mostre ainda que isto é falso se A e B forem apenas fechados.

(3) Deduza que a esfera unitária $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ é um conjunto conexo. Seja $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Deduza que existe $p \in \mathbb{R}$; $f(p) = f(-p)$.

(4) Sejam $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas, satisfazendo $f(0) < g(0)$. Exiba condições suficientes para que exista um ponto $y > 0$, tal que $f(y) = g(y)$. Exiba condições suficientes

para que exista um único ponto $y > 0$, tal que $f(y) = g(y)$. Dê exemplos explícitos de ambas as situações.

(5) Sejam $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ duas funções contínuas, satisfazendo $f(0) = 1$ e $g(0) = 2$. Assuma que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ e que $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$. Segue então que existe $y > 0$ tal que $f(y) = g(y)$.

(6) Seja $f : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ contínua tal que $f(0) = 1/2$ e $f(x) \to 1$ quando $\|x\| \to \infty$. Deduza que f assume um mínimo global.

(7) Deduza que uma matrix real $(2n + 1) \times (2n + 1)$ possui sempre um autovalor real.

(8) Seja $f : X \to Y$, uma aplicação contínua de um espaço métrico compacto X em um espaço métrico Y. Deduza que f é uniformemente contínua.
   (a) Deduza que $f(x) = \sqrt{x}$ é Lipschitz para $x \geqslant a > 0$ e uniformente contínuma, mas não Lipschitz em $[0, \infty)$.
   (b) Estenda o que foi feito no item anterior para a função $f(x) = x^{1/p}, x \geqslant 0, p \in \mathbb{Z}^+$.
   (c) Seja X um subconjunto da reta real $\mathbb{R}$. Seja $f : X \to \mathbb{R}$, uma aplicação uniformemente contínua. Deduza que se a é um valor aderente a X, então limite $\lim_{x \to a} f(x)$, existe. Conclua que toda aplicação uniformente contínua $f : X \to \mathbb{R}$, admite uma única extensão contínua $F : \overline{X} \to \mathbb{R}$, (i. e, $F|_X = f$, F restrita a X é igual à f) que é uniformemente contínua. Além disso, conclua que se X é limitado, então $f(X)$ é limitado.
   (d) Dê exemplos de funções contínuas definidas em $(0, 1]$ que não são uniformente contínuas.
   (e) Estabeleça um critério usando sequências para que uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *não seja uniformente contínua*. Aplique para deduzir que $f(x) = x^3$ não é uniformemente em $\mathbb{R}$.

(9) Seja X um subconjunto de um espaço métrico Z. Seja $f : X \to \mathbb{R}$, uma aplicação uniformemente contínua. Deduza que se a é um valor aderente a $X \subset Z$ (imagine X contido num espaço métrico ambiente Z, digamos $Z = \mathbb{R}^n$), então limite $\lim_{x \to a} f(x)$, existe. Conclua que toda aplicação uniformemente contínua $f : X \to \mathbb{R}$, admite uma única extensão contínua $F : \overline{X} \to \mathbb{R}$, que é além disso uniformemente contínua.

(10) Generalize o item anterior para uma aplicação uniformemente contínua $f : X \subset Z \to Y$, de um espaço métrico $X \subset Z$ num espaço métrico completo Y.

(11) (*Teorema do ponto fixo de Brouwer*) Deduza que toda aplicação contínua $f : [0,1] \to [0,1]$ possui um ponto fixo, isto é $f(x) = x$ para algum $x \in [0,1]$. Estabeleça alguma condição que garanta que o ponto fixo é único.

(12) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real convexa que não é injetora. Deduza que f assume um mínimo global.

(13) (*Teorema do ponto fixo de Banach*). Seja X um conjunto fechado não vazio de $\mathbb{R}^n$ e seja $f : X \to X$ uma contração de constante k, $0 \leqslant k < 1$, ou seja f satisfaz

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|, \forall x, y \in X.$$

Deduza que f tem um único ponto fixo, i.e existe $p \in X$ tal que $f(p) = p$.

(14) Seja X um espaço métrico. Seja Y um subconjunto de X.
   (a) Assuma que $Y = A \cup B$, onde A e B são subconjuntos abertos disjuntos não vazios. Deduza que $\overline{A} \cap B = \emptyset$ e que $\overline{B} \cap A = \emptyset$, ou seja nenhum destes dois subconjuntos contém valores aderentes do outro.
   Sugestão: Deduza que $A = \overline{A} \cap Y$, concluindo que $\overline{A} \cap B = \emptyset$.
   (b) Reciprocamente, deduza que se $Y = A \cup B$, onde A e B são subconjuntos disjuntos não vazios, tal que $\overline{A} \cap B = \emptyset$ e que $\overline{B} \cap A = \emptyset$. Deduza que A e B são abertos em Y.
   (c) Assuma que $X = C \cup D$, onde C e D são subconjuntos disjuntos não vazios. Deduza que se Y é conexo; então ou $Y \subset C$, ou $Y \subset D$.
   (d) Deduza que a coleção de subconjuntos conexos de X que tem um ponto em comum é conexa.
   (e) Se Y é conexo e se $Y \subset B \subset \overline{Y}$, então B é conexo; em particular, se Y é conexo então $\overline{Y}$ é conexo.
   Sugestão: Escreva $B = C \ \cup D$, onde C e D são subconjuntos diferentes de vazio. Observe que se $Y \subset C$ então $\overline{Y} \subset \overline{C}$.
   (f) Exiba um exemplo de um conjunto conexo que não é conexo por caminhos.
   (g) Deduza que as *componentes conexas* de X são subconjuntos conexos disjuntos cuja união é X. Além disso, deduza que cada conexo de X, intercepta uma e apenas uma de tais componentes.

(15) Agora vamos tratar o conceito de *funções semi-contínuas*. Seja

X um espaço métrico. Seja $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Vamos ver primeiro a definição de funções semi-contínuas superiormente.

Dizemos que φ é *semi-contínua superiormente* (denotamos *scs*), se para cada $a \in X$, temos que

$$\limsup_{x\to a} \varphi(x) \leqslant \varphi(a)$$

Ou seja, $\forall \varepsilon > 0, \exists$ vizinhança U de a em X tal que $\varphi(x) \leqslant \varphi(a)+\varepsilon, \quad \forall x \in U$, se $\varphi(a) > -\infty$. Se $\varphi(a) = -\infty$, a condição é que $\forall A > 0, \exists$ vizinhança U de a, tal que $\varphi(x) < -A, \quad \forall x \in U$.

Por outro lado, Dizemos que $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é *semi-contínua inferiormente* (denotamos *sci*), se para cada $a \in X$, temos que

$$\liminf_{x\to a} \varphi(x) \geqslant \varphi(a)$$

Ou seja, $\forall \varepsilon > 0, \exists$ vizinhança U de a em X tal que $\varphi(x) \geqslant \varphi(a) - \varepsilon, \quad \forall x \in U$, se $\varphi(a) < \infty$. Se $\varphi(a) = \infty$, a condição é que $\forall A > 0, \exists$ vizinhança U de a, tal que $\varphi(x) > A, \quad \forall x \in U$.

(a) (*caracterização das funções scs*) Mostre que $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, é *scs* se e somente se $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\{x; \quad \varphi(x) < \lambda\}$$

é aberto em X.

(b) Mostre que se φ é *scs*, então φ é *limitada superiormente* em qualquer compacto $K \subset X$

(c) Mostre que se X é compacto e se φ é *scs*, então f assume o máximo em K.

(d) Mostre que se φ é *scs* e limitada superormente em X, então o conjunto $\{x; \quad \varphi(x) = M\}$ é fechado em X.

(e) Deduza que se u é *scs* e $u(x) \geqslant 0$, $\forall x \in X$, então $v(x) := \log u(x)$ é ainda *scs*, definindo $v(x) = -\infty$, sempre que $u(x) = 0$.

(f) Mostre que se φ_1 e φ_2 são funções semi-contínuas superiormente, então, se $\lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \geqslant 0$, as funções $x \mapsto \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$, $x \mapsto \max(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ e $\lambda\varphi_1(x)$ são *scs*.

(g) Se $\{\varphi_n\}$ é uma seqüência de funções *scs* no espaço métrico X, assumindo que $\varphi_{n+1}(x) \leqslant \varphi_n(x)$, mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ é ainda *scs*.

(h) (*caracterização das funções sci*) Mostre que $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, é *sci* se e somente se $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\{x; \quad \varphi(x) \leqslant \lambda\}$$

é fechado em X.

(i) Mostre que toda função *sci* definida num espaço métrico compacto X assume o mínimo em X.

(j) Mostre que se φ é *scs*, então $-f$ é *sci*.
(k) Mostre que φ é contínua, se e somente se φ é *scs* e *sci*.

OBS: Seja X um espaço métrico e seja u umna função semicontínua superiormente. Segue então que existe uma sequência de funções contínuas $\{u_n\}$ em X tais que: $u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x)$, $n \geqslant 1, x \in X$ e $u_n(x) \to u(x)\,(n \to \infty)$, ou seja $u_n \downarrow u$.