LISTA 8 DE ANÁLISE REAL 2011

RICARDO SA EARP

Diferenciabilidade de funções reais de várias variáveis reais

(1) Considere

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ se } x=0, y=0 \end{cases}$$

(a) Determine se f é limitada ou não no plano $\mathbb{R}^2$.
(b) Determine se f possui um mínimo global. Determine se f possui um máximo global. Calcule as derivadas parciais nestes pontos, caso tais pontos existam.
(c) Escreva a equação do plano tangente relativa a um ponto de máximo global correspondente a um ponto (x, y) contido no primeiro quadrante aberto $x > 0, y > 0$, caso tal ponto exista.
(d) Discuta a continuidade de f na origem, e em seguida discuta a continuidade de f em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
(e) Discuta a diferenciabilidade de f.
(f) Discuta a existência e continuidade das derivadas parciais de f, primeiramente na origem e em seguida nos outros pontos do plano.
(g) Discuta a classe de diferenciabilidade de f em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
(h) Encontre a equação do plano tangente ao gráfico de f relativa ao ponto $(2,3)$. Explicite um normal N neste ponto.
(i) Usando o MAPLE, esboce um desenho do gráfico de f.

(2) Considere

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^4+y^2} \text{ se } -1 < x < 1 \\ 0 \text{ se } x=0, y=0 \end{cases}$$

Note que f está definida numa faixa vertical.
(a) Determine se f é limitada ou não.
(b) Discuta a continuidade de f.

(c) Discuta a existência e continuidade das derivadas parciais de f, primeiramente na origem e em seguida nos outros pontos do plano.
(d) Discuta a diferenciabilidade de f.
(e) Discuta a classe de diferenciabilidade de f em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
(f) Seja $a > 0$. Deduza que para todo ponto da forma $(0, a)$, o normal N ao gráfico de f é vertical (ou seja, paralelo ao vetor $(0, 0, 1)$).
(g) Seja $a > 0$. Deduza que f restrita à bola $B_{a/2}(a, 0)$ de raio $a/2$ centrada em $(a, 0)$ é diferenciável.

(3) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 satisfazendo,

(a) $f(0, 0) = 2$.
(b) $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} f(x, y) = 1$.

Deduza que
(a) Existe um ponto $p = (x_0, y_0)$ tal que $f_x(p) = f_y(p) = 0$ e $f_{xx}(p) \leqslant 0, f_{yy}(p) \leqslant 0$.
(b) Existe uma tal função f da forma $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$, onde $g : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ é uma função suave.

(4) Considere a bola $B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < 1\}$. Considere uma função $f : B_1(0) \longrightarrow (0, \infty)$ de classe C^1 satisfazendo $\lim\limits_{x^2+y^2\to 1} f(x, y) = 0$. Deduza que:
(a) A função $g(x, y) := \ln f(x, y)$ tem um ponto crítico em $B_1(0)$, , *i.e* existe $p \in B_1(0)$; $Dg(p) = 0$.
(b) Existe uma $f(x, y)$ satisfazendo o item anterior com $0 < f(x, y) \leqslant 1$, $\forall (x, y) \in B_1(0)$.

(5) Seja $B_1(0)$, a bola unitária centrada na origem de $\mathbb{R}^2$. Seja $f : \overline{B_1(0)} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que é de classe C^2 em $B_1(0)$ ($\overline{B_1(0)}$ denota o fecho de $B_1(0)$).

Deduza:

Existe uma tal f satisfazendo as condições (a) e (b) abaixo:
(a) $f(0, 0) = 1$ e $\sup\limits_{\partial B_1(0)} |f(x, y)| < 1$, onde $\partial B_1(0)$ é o bordo ou fronteira de $B_1(0)$
(b) $f(x, y)$ satisfaz a inequação diferencial
$$(1 + y^2) f_{xx} + (1 + x^2) f_{yy} + 3y f_x + 4x f_y > 0 \qquad \text{em} \quad B_1(0).$$

(6) Seja Ω o primeiro octante de $\mathbb{R}^3$ dado por $x > 0, y > 0, z > 0$. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função real diferenciável

positivamente homogênea em Ω, isto é f satisfaz

$$f(tx) = t^\alpha f(x), \quad t > 0, x \in \Omega$$

Para $x \in \Omega$ fixado, seja $\varphi(t) := f(tx), t > 0$.
(a) Encontre uma fórmula para $\varphi'(t)$.
(b) Deduza o *teorema de Euler*: $\nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x), \forall x \in \Omega$.
(c) Generalize para $\mathbb{R}^n$.

(7) Seja $f(x, y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}, y > 0, y > 0$.
(a) Encontre os pontos críticos de f
(b) Encontre os mínimos locais e globais de f no conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$, casos estes existam. Encontre o normal unitário da parametrização natural do gráfico de f nestes pontos.
(c) Encontre os mínimos locais de f.
(d) Sejam $a_1 > 0, \ldots, a_n > 0$. Seja $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \cdots x_n + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x_i}$, onde $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$. Encontre o mínimo global de f, caso este existae deduza uma desigualdade.

(8) Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é chamada de *harmônica* se
$\triangle f(x) = \sum_{i=1}^n f_{x_i x_i}(x) = 0, x \in \Omega$ onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$.
(a) Exiba exemplos de funções harmônicas $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que sejam i) polinômios, ii) funções racionais, iii) funções elementares envolvendo funções trigonométricas e a exponencial. Explicite os seus domínios.
(b) Exiba uma fórmula para o *Laplaciano* $\triangle f$ de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 em *coordenadas polares* (r, θ).
(c) Exiba exemplos de funções harmônicas $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que sejam dadas por polinômios.
(d) Exiba uma fórmula para o *Laplaciano* $\triangle f$ de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 em *coordenadas cilíndricas* (r, θ, z).
(e) Deduza que uma função harmônica $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é, *localmente*, a parte real de uma função holomorfa.
(f) Encontre uma função harmônica nas variáveis x, y, dada por uma fórmula elementar, definida na faixa $0 \leqslant y \leqslant \pi$, que não seja limitada, mas que tome o valor zero no bordo da faixa.

(g) Seja $r(x) := \|x\|, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(i) Encontre uma fórmula para as derivadas parciais de $r(x)$.
(ii) Calcule ∇r o gradiente de $r(x)$, e sua norma $\|\nabla r\|$.
(iii) Seja $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável. Seja $f := h \circ r$. Deduza que

$$\triangle f = h'' \circ r + \frac{n-1}{r} h' \circ r$$

Conclua que $f(x) = r^{-n+2}, n \geqslant 3$ é harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Conclua o mesmo para $f(x) = \ln r$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

(h) Sejam f, g duas harmônicas num domínio Ω. Deduza que o produto fg é também harmônica, se e só se $\nabla f \cdot \nabla g = 0$.

(i) Seja Ω um domínio de $\mathbb{R}^n$. Seja $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $\overline{\Omega}$ e harmônica em Ω. Deduza que o máximo e o mínimo de f é assumido no bordo $\partial\Omega$.

Sugestão:
Considere $g(x_1, \ldots, x_n) := f(x_1, \ldots, x_n) + \varepsilon x_1^2$, $\varepsilon > 0$

(j) Sejam a, b números reais positivos. Considere o domínio $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n ; 2 < \|x\| < 3\}$ $(n \geqslant 2)$. Resolva o *problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = a & \text{se } \|x\| = 2 \\ u = b & \text{se } \|x\| = 3 \end{cases}$$

(k) Seja f uma função harmônica de definida no disco perfurado $\{0 < x^2 + y^2 < 1\}$. Seja $h(x, y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2} \right)$, $x^2 + y^2 > 1$. Discuta a harmonicidade ou não de $u(x, y) := f(h(x, y))$ no exterior do disco $x^2 + y^2 > 1$.

(9) Encontre uma solução não trivial da equação

$$u_{xx} + u_{yy} + 2u = 0$$

no quadrado aberto $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$, dada por uma fórmula elementar, se anulando no bordo do quadrado. Determine o máximo global desta função.

(10) Encontre uma E.D.P. de primeira ordem nas variáveis x, y da forma

$$f(x, y, z, z_x, z_y) = 0 \qquad (*)$$

(pensando que $z(x, y)$ é uma função das variáveis x, y satisfazendo a equação $(*)$) cuja *superfícies integral* estão dadas por $xy + z^2 = c$, onde c é uma constante.

(11) Assuma que $F(x, y, z) = 0$ define localmente implicitamente uma superfície que pode ser vista tanto como um gráfico vertical $z = f_1(x, y)$, ou como um gráfico horizontal das duas formas $x = f_2(y, z)$ ou $y = f_3(x, z)$. Mostre que $\dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial z} = -1$, interpretando.

(12) Considere uma superfície de revolução em torno do eixo z da forma $z = F(r)$, $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Mostre que as derivadas parciais de $z = z(x, y)$ satisfazem uma EDP linear (homogênea) de primeira ordem da forma $yp - xq = 0$, onde $p = z_x$ e $q = z_y$.

(13) Considere uma superfície que é localmente o gráfico de uma função $z(x, y)$ dada implicitamente por uma equação da forma $F(u, v) = 0$, onde $u = u(x, y, z)$ e $v = v(x, y, z)$ são funções dadas de x, y, z de classe C^1, e F é uma função dada de u e de v de classe C^1.
   (a) Dê exemplos de $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ e F explícitas.
   (b) Mostre que $p = z_x$ e $q = z_y$ satisfazem uma E.D.P. de primera ordem $p\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)} + q\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(z, x)} = \dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$, onde $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = u_x v_y - u_y v_x$, etc.. Calcule explicitamente nos exemplos dados no item (a).

(14) Seja $v = v(x, y)$ e $u = u(x, y)$, para $(x, y) \in \Omega$, sendo Ω um aberto de $\mathbb{R}^2$. Admita que u, v sejam de classe C^1. Assuma que $u = H(v)$, onde H é de classe C^1.
   (a) Encontre $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ e H explícitas. Veja, por exemplo, u e v satisfazendo $u^2 + v^2 = 1$ ou $v = u^2 - 3u + 2$.
   (b) Mostre que $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = u_x v_y - u_y v_x \equiv 0$. Verifique esta relação nos exemplos obtidos em (a).

(15) Seja A uma matriz $n \times n$. Seja $f(x) = Ax \cdot x$, onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $\cdot$ denota o produto escalar usual em $\mathbb{R}^n$. Encontre uma fórmula para $f'(x)$.

(16) Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável tal que todas as derivadas parciais satisfazem $|\partial^i g / \partial x_j| \leqslant c < 1/n, c > 0$ em $\mathbb{R}^n$. Deduza que a aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) := x + g(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$ produz um homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$.

(17) Responda verdadeiro ou falso em cada item. Caso verdadeiro esboce uma dedução sucinta correta e exiba um exemplo que ilustre a afirmação, se for o caso. Caso falso, explique a falsidade ou exiba um contraexemplo, conforme a situação. Justifique a sua resposta. Não serão aceitas respostas sem justificativas corretas.

(a) Seja $B_1(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, x^2+y^2 < 1\}$, a bola unitária aberta centrada na origem de $\mathbb{R}^2$.

A afirmação é a seguinte:

Existe uma tal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suave satisfazendo as condições (a) e (b) abaixo:

(i) $f(0,0) > 0$ e $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \boldsymbol{B_1(0)}$, $f(x,y) \leqslant 0$.

(ii) $f(x,y)$ satisfaz a equação diferencial parcial:

$$(x^2+y^2-2xy)f_{xx} + (1-x^2-y^2)f_{yy} - 3\,f_x$$
$$-4\cos x \sin y\, f_y = e^{1-x^2-y^2} \quad \text{em} \quad B_1(0)$$

(b) Seja $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, x^2+y^2 = 1\}$ o círculo unitário centrado na origem de $\mathbb{R}^2$. Seja $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ a aplicação dada por $\pi(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$.

Seja $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ uma aplicação contínua que admite um "levantamento´´ contínuo (aplicação contínua) $\widetilde{f} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ satisfazendo $\pi \circ \widetilde{f}(\xi) = f(\xi)$, $\forall \xi \in \mathbb{S}^1$.

Segue então que existe $x \in \mathbb{S}^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.

(c) Seja $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável cuja derivada está dada por

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}\, e^{x-1}}{x\sqrt{1-e^{2x-2}}}, \quad \forall x \in (0,1)$$

(i) Segue então que f é de classe $C^\infty(0,1)$ e a derivada $f'(x)$ possui um mínimo global em $(0,1)$.

(ii) Existe um ponto x_0, satisfazendo $0 < x_0 < 1$ tal que percorrendo o sentido crescente do eixo x, o gráfico de f em x_0, muda de côncavo para convexo. Além disso, este ponto x_0 é o único ponto com esta propriedade.