LISTA 9 DE ANÁLISE REAL 2009

RICARDO SA EARP

Convergência uniforme

(1) Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções eqüicontínuas em um conjunto compacto K que converge pontualmente em K. Mostre que que f_n converge uniformemente em K.

(2) Assuma que uma sequência de funções diferenciáveis $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ converge pontualmente a uma função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Assuma que a sequência das derivadas $\{f_n'\}$ é uniformemente limitada; *i.e* $\exists M > 0; |f_n'(x)| \leqslant M$, $\forall x \in (0,1)$. Deduza que f é contínua.

(3) (*Critério de convergência uniforme*) Seja X um conjunto e seja $\{f_n\}$ um seqüência de funções definidas em X. Mostre que $f_n \xrightarrow{u} f$, uniformemente em X, se e somente se $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = 0$, para toda seqüência $\{x_n\}$ em X.

Utilize este resultado para mostrar que $f_n(x) = nx(1-x)^n, 0 \leqslant x \leqslant 1$ é uma seqüência de funções contínuas que converge pontualmente à 0, mas a convergência não é uniforme. Seria tal seqüência limitada no espaço métrico $C([0,1])$? O que isto tem a ver com o teorema de Arzelà- Ascoli ?

(4) Seja K um espaço compacto e sejam $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ sequências de funções reais contínuas tais que $f_n \to f$ e $g_n \to g$, uniformemente em K. Deduza que $f_n g_n \to fg$ uniformemente em K. Mostre com um contraexemplo que a hipótese da compacidade não pode ser relevada.

(5) Estude se a sequência $f_n(x) = \sin nx$, $n \in \mathbb{N}^*$ contém uma subsequência convergente ou não.

(6) Mostre que a seqüência de funções reais $f_n(x) = \sin(x + n^3 + e^{n^2})$ contém uma subseqüência que converge uniformemente em qualquer subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$.*Sugestão*: Use as fórmulas trigonométricas: $\cos z - \cos w = -2\sin(\dfrac{z+w}{2})\sin(\dfrac{z-w}{2})$ e $\sin z + \sin w = 2\sin(\dfrac{z+w}{2})\cos(\dfrac{z-w}{2})$.

Você poderia apresentar uma família de exemplos bem mais gerais que contenha este exemplo ?

(7) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua satisfazendo $\int_a^b f(x)\, x^n \, \mathrm{d}x = 0, n = p, p+1, \ldots, p \in \mathbb{N}^*$. Deduza que f é identicamente nula.

(8) (*Teorema de Dini*) Seja X um compacto. Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções contínuas em X que converge pontualmente para uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$. Assuma que $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x), n = 1, 2, \ldots,$ e cada $x \in X$. Mostre que $f_n \xrightarrow[X]{u} f$, i.e f_n converge uniformemente à f em X. Mostre com um exemplo que a hipótese de compacidade é necessária.

(9) (*O espaço de Banach* $C(K)$) Mostre que toda seqüência de funções limitadas que é uniformemente convergente, também é uniformemente limitada.

(10) Seja K um conjunto compacto. Defina uma métrica no conjunto $C(K)$ das funções reais contínuas definidas em K, de modo que uma seqüência f_n converge à f em $C(K)$ se e somente se f_n converge uniformemente à f em K. Discuta a completude deste espaço métrico. Discuta a noção de subconjunto fechado em $C(K)$. Discuta a noção de subconjunto compacto deste espaço, relacionando com o teorema de Arzelà- Ascoli.

(11) Seja $C([a, b])$ o espaço da funções contínuas definidas no intervalo $[a, b]$ com a norma do sup. Seja T o operador em $C([a, b])$ dado por $T(f)(x) := \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$. Deduza que T é um *operador contínuo*.

Deduza que T é um *operador compacto*, *i.e* leva toda seqûencia limitada numa sequência que possui uma subsequência uniformemente convergente, ou, equivalentemente, leva conjuntos limitados (de $C([a, b])$) em subconjuntos precompactos (de $C([a, b])$) (cujo fecho é compacto). Generalize para outros operadores, dando outros exemplos.

(12) Seja $\overline{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ e seja $\mathcal{F}$ uma família do conjunto de todas as funções$f : \overline{B}_1(0) \to \mathbb{R}$ de classe C^1 com as primeiras derivadas parciais *localmente uniformemente limitadas* em $\overline{B}_1(0)$. Mostre que $\mathcal{F}$ é equicontínuo em $\overline{B}_1(0)$. *Sugestão*: Mostre que dado $x_0 \in \overline{B}_1(0)$, existe uma vizinhança compacta $K = \overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$, e M_K tal que

$$|f_{x_i}(x)| \leqslant M_K, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Logo $\forall f \in \mathcal{F}$ (justifique),

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \sqrt{n} M_K \|x - x_0\|$$

Nas hipótese acima seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções de $\mathcal{F}$ que é localmente limitada. Deduza que f_n possui uma subsequência f_{n_j} uniformemente convergente a uma *função contínua* f em $\overline{B}_1(0)$ e $\{f_n\}$ é uniformemente limitada em $\overline{B}_1(0)$.

Deduza que, se as f_n satisfazem à equação

$$f_n^2 + 2f_n + \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 1 = 0$$

em $\overline{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ então f satisfaz à mesma equação.

(13) (*Fazer após o curso de Variáveis Complexas*) Discuta amplamente o conceito de *família normal* das Variáveis Complexas, relacionando com o teorema de Arzelà- Ascoli e com o *teorema de Montel para funções meromorfas*. Discuta o *princípio de Bolzano- Weierstrass* neste contexto. Além disso, discuta como o *princípio de compacidade* interfere na demonstração do *teorema de uniformização de Riemann.*

(14) Seja $\mathcal{F}$ a família de funções $\{f : B_1(0) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ de classe C^∞, satisfazendo

$$|f(z)| \leqslant \frac{c_0}{1-|z|}$$
$$|f^{(k)}(z)| \leqslant \frac{c_k(1+|z|)}{1-|z|}$$
$$c_0, c_k > 0, k = 1, 2\ldots$$

Mostre que toda seqüência $\{f_n\}$ de funções em $\mathcal{F}$, contém uma subseqüência $\{f_{n_j}\}$ uniformemente convergente em todo compacto $K \subset B_1(0)$, à uma função $f \in \mathcal{F}$.

Pergunta adicional: Como o enunciado deste problema poderia ser sob um ponto de vista teórico consideravelmente simplificado- sem alterar a força da conclusão- no contexto de *funções holomorfas* definidas na bola unitária $B_1(0) \subset \mathbb{C}$?

(15) Seja Ω um domínio de $\mathbb{R}^2$. Considere a *equação da superfície mínima* dada por

$$(*) \qquad (1+u_x^2)u_{yy} - 2u_xu_yu_{xy} + (1+u_y^2)u_{xx} = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega$$

Seja u_n uma seqüência de funções de classe C^3 que satisfazem a equação $(*)$. Assuma que em todo compacto $K \subset \Omega$, u_n é uma seqüência de funções uniformemente limitada. Assuma que as derivadas parciais de cada u_n dependem em todo ponto $p \in \Omega$- em valor absoluto- apenas da limitação da altura de cada u_n e da distância de p ao bordo de Ω. Mostre que existe uma subseqüência u_{n_j} que é uniformemente em todo compacto

$K \subset \Omega$, convergindo à uma função u que satisfaz a equação $(*)$ da superfície mínima em Ω.

(16) Deduza uma propriedade semelhante para uma seqüência funções harmônicas uniformemente limitadas em compactos de Ω.

(17) Estudo: Veja como o teorema de Arzela-Ascoli é aplicado no teorema de existência e unicidade de soluções de uma E.D.O. Mas precisamente, usando o *teorema de Weierstrass*, o *teorema de Picard* e o *teorema de Arzela-Ascoli*, mostre o seguinte:

(*Teorema de Peano*) Seja $I_a := \{t; |t - t_o| \leqslant a\} \subset \mathbb{R}$ e seja $B_b = \{x, \|x - x_0\| \leqslant b\} \subset \mathbb{R}^n$. Seja $f : I_a \times B_b \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua limitada, isto é $\|f(x)\| \leqslant M, M > 0, \forall x \in I_a \times B_b$. Deduza que a E.D.O

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

possui uma solução no intervalo $|t - t_0| \leqslant \alpha$, onde $\alpha = \min\{a, \dfrac{b}{M}\}$.

(18) Pesquise como a teoria das *séries d Fourier* pode ser aplicada para dar uma demonstração do teorema de Weierstrass.

(19) Seja $1 \leqslant p < \infty$. Seja $L^p(0,1)$ o espaço das funções $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|^p dx < \infty$. Seja q tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Pesquise a desigualdade de Hölder: Se f está $L^p(0,1)$ e g está em $L^q(0,1)$, então fg está em $L^1(0,1)$ e vale

$$\int_0^1 |fg| dx = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_0^1 |g(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

Quando $p = q = 2$ a desigualdade acima é a conhecida desigualdade de Cauchy-Schwarz.

A norma em $L^p(0,1)$ está dada por $\|u\|_{L^p} := \left(\displaystyle\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$

Agora, seja $W^{1,p}(0,1)$, $(p \geqslant 1)$ o espaço das funções que estão em $L^p(0,1)$ e cujas derivadas (" fracas") também estão em $L^p(0,1)$. Considere $W^{1,p}(0,1)$, (" espaço de Sobolev") como o espaço normado cuja norma está dada por

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

Usando a desigualdade de Hölder, deduza a seguinte desigualdade para u pertencendo à bola fechada unitária de $W^{1,p}(0,1)$ $(p > 1)$

$$|u(x) - u(y)| \leqslant |x - y|^{1/q}, \quad \forall x, y \in (0,1)$$

Conclua que se $1 < p < \infty$, a injeção $j : W^{1,p}(0,1) \hookrightarrow C([0,1])$ é compacta, ou seja, leva conjuntos limitados em conjuntos precompactos (cujo fecho é compacto).

É possível mostrar, fazendo uso da desigualdade de Young e da desigualdade de Hölder, e fazendo uso de um resultado de " densidade" (o conjunto das funções suaves de suporte compacto definidas em toda a reta real é densa em $W^{1,p}$), que vale a seguinte desigualdade $(p \geqslant 1)$:

$$\|v\|_\infty \leqslant C\|v\|_{W^{1,p}}, \qquad \text{para } v \in W^{1,p}(0,1)$$

onde C é uma constante universal. Daí a inclusão $i : W^{1,p}(0,1) \hookrightarrow L^\infty(0,1)$ é contínua $(p \geqslant 1)$.