

## LISTA 9 DE ANÁLISE REAL 2011

RICARDO SA EARP

### *Integrabilidade*

- (1) Seja  $f$  uma função contínua no intervalo  $[0, \infty)$ . Para  $x > 0$ , colocamos

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt \quad F(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$$

- (a) Mostre que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = f(0) := F(0)$ .  
(b) Assuma agora que  $f(x)$  é diferenciável em  $[0, \infty)$ . Mostre que  $F(x)$  é diferenciável e que  $F'(0) = \frac{f'(0)}{2}$ .
- (2) Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n \frac{\sqrt{n^2 - p^2}}{n^2}$ . Resposta:  $\pi/4$ .
- (3) (*lema de Riemann-Lebesgue*) Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função Riemann integrável. Deduza que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(tx) dx = 0$$

*Sugestão:* Considere uma partição  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$  dada por  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  e faça estimativas em cada intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , usando o critério de integrabilidade. OBS: O lema de Riemann Lebesgue é válido em  $L^1$ , usando um argumento de aproximação, aproximando uma função em  $L^1$  por uma função contínua.

- (4) Exiba um exemplo de uma curva parametrizada  $C^0$  que não é retificável.
- (5) Considere a função  $f(x) = -\frac{1}{\ln|x|}$ ,  $0 < |x| < 1/2$ ,  $f(0) = 0$ . Deduza que  $f(x)$  é de variação limitada.
- (6) Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável tal que sua derivada seja limitada. Deduza que  $f$  é absolutamente contínua, logo de

variação limitada. Exiba um exemplo de uma função contínua num intervalo fechado que não é de variação limitada.

- (7) Vamos agora examinar de um outro ponto de vista as identidades

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \quad \ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

que já sabíamos deduzir via as séries de Taylor de  $\arctan z$  e  $\ln(1+z)$ , na origem. Considere a integral

$$I(n) = \int_0^{\pi/4} \tan^n \theta \, d\theta \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

- (a) Fazendo integração por partes mostre que

$$\begin{aligned} I(2n) &= \int_0^{\pi/4} \tan^{2n-2} \theta (\sec^2 \theta - 1) \, d\theta \\ &= -I(2n-2) + \int_0^{\pi/4} \tan^{2n-2} \theta \sec^2 \theta \, d\theta \\ &= -I(2n-2) + \frac{1}{2n-1} \\ &= \frac{1}{2n-1} - \left( -I(2n-4) + \frac{1}{2n-3} \right) \\ &\dots \\ &= \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-5} - + \dots + (-1)^{n-1} + (-1)^{n-1} \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Deduzindo que

$$(1) \quad \left| \frac{\pi}{4} - \sum_1^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \right| = I(2n)$$

Analogamente, mostre que

$$(2) \quad \left| \frac{1}{2} \ln 2 - \sum_1^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k} \right| = I(2n+1)$$

- (b) Mostre que  $I(n)$  decresce estritamente quando  $n$  cresce, concluindo que

$$I(n) < \frac{1}{2(n-1)} \quad I(n-2) > \frac{1}{2(n-1)}$$

portanto

$$\frac{1}{2(n+1)} < I(n) < \frac{1}{2(n-1)}$$

- (c) Aplique o resultado acima nas equações (1) e (2) para obter as estimativas

$$\frac{1}{2(2n+1)} < \left| \frac{\pi}{4} - \sum_1^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \right| < \frac{1}{2(2n-1)}$$

$$\frac{1}{2(n+1)} < \left| \ln 2 - \sum_1^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| < \frac{1}{2n}$$

- (8) Deduza que toda integral imprópria absolutamente convergente

é convergente. Deduza que a integral imprópria  $\int_1^{\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$  é absolutamente convergente.

- (9) Seja  $f : [a, b) \rightarrow [0, \infty)$ , uma função localmente integrável. Es-

tabeleça um critério para que a integral imprópria  $\int_a^b f(x) dx$ , seja convergente.

- (10) Sejam  $f, g : [a, b) \rightarrow [0, \infty)$ , duas funções localmente integráveis. Seja  $c \in [a, b)$ . Assuma que  $f(x) \leq g(x), \forall x \in [c, b)$ .

- (a) Assuma que  $\int_a^b g(x) dx$  seja convergente. Deduza que o

mesmo vale para  $\int_a^b f(x) dx$ .

- (b) Assuma que  $\int_a^b f(x) dx$  seja divergente. Deduza que o mesmo ocorre para  $\int_a^b g(x) dx$ .

Assumindo agora  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : [a, b) \rightarrow [0, \infty)$ , conclua o seguinte

- (a) Se  $f = O(g)$ , quando  $x \rightarrow b_-$  e se  $\int_a^b g(x) dx$  é convergente,

então a integral  $\int_a^b f(x) dx$  é absolutamente convergente.

- (b) Se existe  $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ , tal que  $f \sim \alpha g$ , quando  $x \rightarrow b_-$  (i.e.  $f - \alpha g = o(g)$ ), então  $\int_a^b f(x) dx$  é convergente se, e

só se  $\int_a^b g(x) dx$  é convergente.

- (11) Seja  $\alpha \in \mathbb{R}$  e seja  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função localmente integrável. Aplicando o exercício precedente, deduza que

- (a) Se  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x)$  existe e é não nulo, então  $\int_a^\infty f(t) dt$  converge se e somente se  $\alpha > 1$ .

- (b) Se  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) = 0$  e se  $\alpha > 1$  então  $\int_a^\infty f(t) dt$  é absolutamente convergente.

- (c) Exemplifique as situações dos itens anteriores, por exemplo

considerando  $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ .

- (d) Seja  $I = \int_2^\infty \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt$ .

(i) Deduza que se  $\alpha > 1$  então a integral é convergente.

(ii) Deduza que de  $\alpha < 1$  então  $I$  é divergente.

(iii) Deduza que se  $\alpha = 1$  e  $\beta > 1$ , então  $I$  é convergente.

- (12) Deduza que para que a integral imprópria  $\int_a^\infty f(t) dt$  converja é suficiente que exista uma sequência  $\{x_n\}$  com  $x_n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ) tal que a série  $\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$  seja convergente e tal a sequência

que  $\int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)| dt$  tenda a zero.

- (13) (*Teste da integral*) Assuma que  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  seja decrescente e positiva ( $f \geq 0$ ). Deduza que para que a integral imprópria  $\int_a^\infty f(t) dt$  converja, se e somente se a série  $\sum_{n \geq a} f(n)$  converge.

- (a) Exiba exemplos que ilustrem a situação da afirmação anterior, por exemplo considerando  $I = \int_2^\infty \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt$ , para

$\alpha > 1$  ou  $\alpha = 1$  e  $\beta > 1$ .

- (14) Dê um exemplo de uma função diferenciável  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , que não seja de classe  $C^1$  em  $[0, 1]$ , mas que a derivada seja integrável no sentido que  $\int_0^1 |f'(t)| dt < \infty$ , podendo a integral ser imprópria.

- (15) (*Derivação sob o símbolo da integração I*) Seja  $I$  um intervalo aberto da reta. Seja  $f : [a, b] \times I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$  uma função contínua tal que a derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x}$  exista e seja contínua em  $[a, b] \times \mathbb{R}$ . Deduza que a função  $F(x) := \int_a^b f(t, x) dx$  é de classe  $C^1$  e vale que

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt, \quad \forall x \in I$$

- (16) (*Derivação sob o símbolo da integração II*) Seja  $I$  um intervalo aberto da reta. Seja  $f : [a, b] \times I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que a derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x}$  exista e seja contínua em  $[a, b] \times \mathbb{R}$ . Deduza que a função  $H : [a, b] \times [a, b] \times I \rightarrow \mathbb{R}$

dada por  $H(u, v, x) := \int_u^v f(t, x) dx$  é de classe  $C^1$ . Calcule  $\frac{\partial H}{\partial x}(u_0, v_0, x_0)$ ,  $\frac{\partial H}{\partial u}(u_0, v_0, x_0)$  e  $\frac{\partial H}{\partial v}(u_0, v_0, x_0)$

- (17) (*Derivação sob o símbolo da integração III*) Nas hipóteses do item anterior, se  $u : I \rightarrow [a, b]$  e  $v : I \rightarrow [a, b]$  são funções diferenciáveis, deduza que  $H(x) := \int_{u(x)}^{v(x)} f(t, x) dx$  é diferenciável em  $I$  e vale que

$$H'(x) = v'(x)f(v(x), x) - u'(x)f(u(x), x) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt$$

Conclua que

- (18) (*Fubini-versão bem particular*) Se  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua então

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(t, x) dx \right) dt = \int_c^d \left( \int_a^b f(t, x) dt \right) dx$$

- (19) Considere a função real dada

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

- (a) Mostre que  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e que

$$f'(x) = \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt$$

Além disso mostre que  $f(x) \rightarrow 0$ , quando  $x \rightarrow \infty$  e que  $f(x) \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow -\infty$ .

- (b) Considere  $g(x) = f(x^2)$ . Mostre que  $g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$ .

Deduza que

- (c)  $g(x) + \left( \int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 = \frac{\pi}{4}$ , e portanto  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

(20) Mostre que

$$\int_a^b \frac{1}{(t^2 + 1)^{n+1}} dt = \frac{1}{2n} \frac{t}{(t^2 + 1)^n} \Big|_a^b + \frac{2n-1}{2n} \int_a^b \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt$$

(21) Calcule

(a)

$$\int_0^1 \frac{1}{t^4 + 1} dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\pi}{2}$$

(b)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 t dt = \frac{3\pi}{16}$$

(c)

$$\int_a^x \frac{1}{\sin t} dt = \ln \left( \tan \frac{x}{2} \right) - \ln \left( \tan \frac{a}{2} \right)$$

(d)

$$\int_a^x \frac{1}{\sin^4 t} dt = \left( \frac{1}{3 \tan^3 a} - \frac{1}{3 \tan^3 x} \right) + \left( \frac{1}{\tan a} - \frac{1}{\tan x} \right)$$

(e) (*Fórmula de Wallis*) Seja  $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$ . Obtenha uma relação de recorrência entre  $I_n$  e  $I_{n-1}$ , calculando  $I_{2n}$  e  $I_{2n+1}$ .

(22) Calcule

$$\int_a^b \frac{1}{t} \sqrt{\frac{1+t}{t}} dt \quad (0 < a < b)$$

(23) Estude a convergência das integrais impróprias

(a)

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} e^{-xy} dy, \quad x \geq a > 0$$

(b)

$$\varphi(x) = \int_1^{\infty} \frac{1}{y^{1+x}} dy, \quad x \geq a > 0$$

(c)

$$\int_0^{\infty} \sin t^2 dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}, \quad \int_0^{\infty} \cos t^2 dt$$

(d)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx = \pi e^{-\alpha}, \quad \alpha > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx !!$$

(e)

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad 0 < a < 1$$

(24) Mostre que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} e^{-R \sin \theta} d\theta = 0$$

Nota: Na verdade,  $\lim_{R \rightarrow \infty} R \int_0^{\pi} e^{-R \sin \theta} d\theta = 2$ .

(25) Estude a convergência das integrais impróprias

$$\Gamma_1(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \Gamma_2(x) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad 0 < a \leq x \leq b$$

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$