

LISTA EXTRA A DE ANÁLISE REAL 2011

RICARDO SA EARP

Espaços vetoriais normados: Exemplos de espaços de Banach e de Hilbert

- (1) Seja E um espaço vetorial normado com norma $\|\cdot\|$. Deduza que $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.
- (2) Sejam E_1, \dots, E_n espaços vetoriais normados cujas normas são $\|\cdot\|_1, \dots, \|\cdot\|_n$, respectivamente.
Seja $E := E_1 \times \dots \times E_n$ o espaço produto.
- (a) Para cada $v = (v_1, \dots, v_n) \in E$ definimos $\|v\|_\infty := \max\{\|v_1\|, \dots, \|v_n\|\}$.
Deduza que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço vetorial normado. Note que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach, se e só se cada $(E_i, \|\cdot\|_i)$ é um espaço de Banach.
- (b) Para cada $v = (v_1, \dots, v_n) \in E$ definimos $\|v\|_1 := \sum_{i=1}^n \|v_i\|_i$.
Deduza que $(E, \|\cdot\|_1)$ é um espaço vetorial normado.
- (c) Para cada $v = (v_1, \dots, v_n) \in E$ definimos $\|v\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n \|v_i\|_i^2\right)^{1/2}$.
Deduza que $(E, \|\cdot\|_2)$ é um espaço vetorial normado.
- (3) (a) Deduza com detalhes que o espaço $\ell^p, p \geq 1$ definido por

$$\ell^p := \{x = \{x_n\}(\text{sequências de números reais}); \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$$

é um espaço vetorial normado com a norma (ℓ^p é uma “espaço de Banach”).

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$$

- (b) Além disso, deduza com detalhes que $\ell^\infty := \{x = \{x_n\}; |x_n| \leq C\}$, onde C é uma constante = {sequências de números reais limitadas}, é um espaço vetorial normado com a norma $\|x\| = \sup_n |x_n|$ (ℓ^∞ é uma “espaço de Banach”).
- (c) Deduza que a norma em ℓ^2 é proveniente de um produto interno (ℓ^2 é um “espaço de Hilbert”).

- (d) Deduza que a norma em ℓ^∞ não é proveniente de um produto interno.
- (e) Deduza que se $0 < p < q$, então

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q \right)^{1/q} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \quad (\text{Desigualdade de Jensen}).$$

concluindo que se $1 \leq p < q$ então $\ell^p \subset \ell^q$.

- (f) Deduza que $\|x\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{p \rightarrow \infty} |x_1|^p + \dots + |x_n|^p \right)^{1/p}$.
- (g) Dê um exemplo de uma sequência $x = \{x_n\}$ que está em ℓ^2 mas, não está em ℓ^1 . Generalize para uma sequência que está em ℓ^q mas, não está em ℓ^p , para $1 \leq p < q$. Deduza que a inclusão $\ell^p \subset \ell^q$, se $1 \leq p < q$, é estrita.
- (h) Usando obrigatoriamente a desigualdade de Hölder (cf: Lista 1), deduza a seguinte desigualdade entre a *média das potências* (que é válida para todo p, q satisfazendo $p < q$):

$$(2) \quad \left(\frac{\sum_{i=1}^N |a_i|^p}{N} \right)^{1/p} \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^N |a_i|^q}{N} \right)^{1/q}$$

- (i) Agora, deduza a desigualdade entre a *média das potências* acima, usando obrigatoriamente o conceito de *convexidade*.
- (4) Dados números positivos $a_i > 0, i = 1, \dots, n$ e números não negativos $b_i \geq 0, i = 1, \dots, n$, e dado $r > 1$ deduza a desigualdade (desigualdade de Minkowski de índice $r > 1$)

$$\left[\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^r + \left(\sum_{i=1}^n b_i \right)^r \right]^{1/r} \leq \sum_{i=1}^n (a_i^r + b_i^r)^{1/r}$$

Sugestão: Considere a função $f(x) = (1 + x^r)^{1/r}, x > 0$.

- (5) Procure estender a definição de convexidade para uma curva simples e fechada de \mathbb{R}^2 .
- (6) Seja E um espaço vetorial e sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas em E e escrevemos $E_1 = (E, \|\cdot\|_1)$ e $E_2 = (E, \|\cdot\|_2)$. Dizemos que $\|\cdot\|_1$ “é mais fina” que $\|\cdot\|_2$, se existe uma constante positiva $c > 0$, tal que $\|x\|_2 \leq c\|x\|_1, \forall x \in E$.
- (a) Deduza que a *topologia* em $E_1 = (E, \|\cdot\|_1)$ é mais fina que a *topologia* em $E_2 = (E, \|\cdot\|_2)$, ou seja se $U \subset E$ é um aberto de E_2 então U é também um aberto de E_1 .

- (b) Seja $\{x_n\}$ uma sequência em E e seja $x \in E$. Deduza que se $x_n \rightarrow x$ em E_1 então $x_n \rightarrow x$ em E_2 . Em particular, deduza que se uma sequência $\{x_n\}$ tem norma em E_1 arbitrariamente pequena para n suficientemente grande, então também tem norma em E_2 arbitrariamente pequena para n suficientemente grande.
- (c) Deduza que a aplicação identidade $\text{Id} : E_1 = (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow E_2 = (E, \|\cdot\|_2)$ é contínua.
- (7) Seja $C^0[a, b]$ o conjunto das funções contínuas reais definidas no intervalo fechado $[a, b]$. Seja $f \in C^0[a, b]$. Considere $\|f\|_\infty := \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$. Considere também $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$. Finalmente considere $\|f\|_2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx$.
- (a) Deduza que $(C^0[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço vetorial normado (“espaço de Banach”).
- (b) Deduza que $(C^0[a, b], \|\cdot\|_1)$ é um espaço vetorial normado (“espaço de Banach”).
- (c) Deduza que $(C^0[a, b], \|\cdot\|_2)$ é um espaço vetorial normado cuja norma é proveniente de um produto interno (“espaço de Hilbert”).
- (d) Deduza que a norma $\|\cdot\|_\infty$ mais fina que a norma $\|\cdot\|_1$, mais que $\|\cdot\|_1$ não é mais fina do que $\|\cdot\|_\infty$.
- (e) Deduza que a norma $\|\cdot\|_\infty$ mais fina que a norma $\|\cdot\|_2$, mais que $\|\cdot\|_2$ não é mais fina do que $\|\cdot\|_\infty$.
- (f) Deduza que a norma $\|\cdot\|_2$ mais fina que a norma $\|\cdot\|_1$, mais que $\|\cdot\|_1$ não é mais fina do que $\|\cdot\|_2$.
- (8) Seja $C^1[a, b]$ o conjunto de todas as funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que possuem derivadas contínuas em todos os pontos. Defina $\|f\|_1 = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| + \sup_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$.
- (a) Deduza que $(C^1[a, b], \|\cdot\|_1)$ é um espaço vetorial normado (“espaço de Banach”).
- (b) Generalize esta definição de espaço considerando o conjunto de todas as funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que possuem derivadas de ordem k contínuas.
- (9) (*Funções convexas num espaço vetorial*).
- Seja E um espaço vetorial. Uma função $\varphi : E \rightarrow (-\infty, \infty]$ é chamada de convexa se $\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)$, $\forall x, y \in E, t \in [0, 1]$.

Dizemos que um subconjunto $A \subset E$ é convexo, se $tx + (1 - t)y \in A, \forall x, y \in A, \forall t \in [0, 1]$.

Defina-se a seguinte região de produto $E \times \mathbb{R}$:

$\text{epi} = \{(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R}; \varphi(x) \leq \lambda\}$.

- (a) Desenhe um gráfico de uma função convexa real de uma variável real e identifique o conjunto epi.
 - (b) Deduza que se φ é uma função convexa, então epi é um subconjunto convexo de $E \times \mathbb{R}$.
 - (c) Deduza que se φ é uma função convexa, então para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in E, \varphi(x) \leq \lambda\}$ é um conjunto convexo.
 - (d) Deduza que se φ_1 e φ_2 são funções convexas então $\varphi_1 + \varphi_2$ é convexa.
- (10) (*Funções semi-contínuas inferiormente e o teorema fundamental do Cálculo Variacional*). Uma função $\varphi : E \rightarrow (-\infty, \infty]$ é chamada de *semi-contínua inferiormente* (s.c.i), se para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ o conjunto $\{x \in E, \varphi(x) \leq \lambda\}$ é fechado.

- (a) Deduza que φ é s.c.i se e somente se para todo $x \in E$ e todo $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança V de x tal que $\varphi(y) \geq \varphi(x) - \varepsilon, \forall y \in V$.

Consequentemente, deduza que se φ é s.c.i e se $x_n \rightarrow x$, então $\limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) \geq \varphi(x)$.

OBS: O teorema fundamental do Cálculo Variacional diz o seguinte:

Seja E um espaço de Banach reflexivo (um espaço vetorial de dimensão finita é reflexivo). Um espaço de Hilbert é reflexivo). Seja $A \subset E$ um conjunto convexo fechado, não vazio. Seja $\varphi : A \rightarrow (-\infty, \infty]$, uma função convexa s.c.i, $\varphi \not\equiv \infty$; tal que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty, x \in A} \varphi(x) = \infty \quad (\text{nenhuma hipótese se } A \text{ é limitado})$$

Segue então que φ atinge um mínimo (global) em A ; ou seja, existe $x_0 \in A$ tal que $\varphi(x_0) = \inf_{x \in A} \varphi(x)$.

A referência para este teorema e para outros teoremas da Análise Funcional que serão citados doravante são as seguintes : *Analyse Fonctionnelle*. Haïm Brezis. Masson, 1983. Ou *Introduction to functional analysis*. A. Taylor, John Wiley & sons, 1958.

- (11) Considere $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ espaços vetoriais normados (que, possivelmente, têm dimensão infinita). Deduza que as afirmações abaixo sobre uma transformação (operador) linear $T : E \rightarrow F$ são equivalentes.
- (a) $T : E \rightarrow F$ é contínua; isto é, fixado $a \in E$ qualquer, segue então que, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que
- $$\|x - a\|_E < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(a)\|_F < \varepsilon.$$
- (b) T é contínua em $0 \in E$.
- (c) Existe $c > 0$ tal que $\|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E, \forall x \in E$.
- (d) Existe $c > 0$ tal que $\|T(x - y)\|_F \leq c\|x - y\|_E, \forall x, y \in E$.
- (12) Assuma que $T : E \rightarrow F$ é linear, injetora e sobrejetora. Deduza que $T : E \rightarrow F$ é um *homeomorfismo*, se existem constantes $a > 0$ e $b > 0$ tal que $a\|x\|_E \leq \|T(x)\|_F \leq b\|x\|_E$.

OBS: Se E e F são espaços de Banach e T é um operador linear contínuo e sobrejetivo de E em F então T é uma aplicação aberta: T leva abertos de E em abertos de F (Este é o “teorema da aplicação aberta da Análise Funcional”).

- (13) Assumindo que E e F são espaços de Banach deduza que se $T : E \rightarrow F$ é linear, injetora e sobrejetora então T^{-1} é contínua de F sobre E .
- (14) Seja $\mathcal{L}(E, F)$ o conjunto de todas as transformações lineares contínuas $T : E \rightarrow F$. Seja $\|T\| := \sup\{|f(x)|, x \in E, \|x\| = 1\}$.
- (a) Deduza que $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$ é um espaço vetorial normado (“Se F é espaço de Banach então $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$ é também um espaço de Banach”).
- (15) (*Lema de Riesz e teorema de Riesz: Caracterização dos espaços vetoriais normados de dimensão finita*).

Vamos fazer o início da teoria de Riesz-Fredholm da Análise Funcional, dando um roteiro e deixando que você complete alguma demonstração.

Seja E um espaço vetorial normado e seja $M \subset E$, um subconjunto de E , $M \neq E$. Seja $v \in E; v \notin M$. Defina $\text{dist}(v, M) := \inf\{\|v - m\|; m \in M\}$.

- (16) Deduza que se M é fechado, então $\text{dist}(v, M) > 0$.
- (17) (*Lema de Riesz*). Seja E um espaço vetorial normado e seja $M \subset E$, um subconjunto fechado, $M \neq E$. Deduza que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists u \in E, \quad \|u\| = 1 \quad \text{e} \quad \text{dist}(u, M) \geq 1 - \varepsilon$$

Sugestão: Seja $v \in E$ com $v \notin M$. Do item anterior segue que $d := \text{dist}(v, M) > 0$. Escolha $m_0 \in M$, $d \leq \|v - m_0\| \leq \frac{d}{1 - \varepsilon}$.

Defina $u := \frac{v-m_0}{\|v-m_0\|}$ e deduza que tal u responde a pergunta do enunciado, calculando $\|u - m\|$, para um $m \in M$ arbitrário.

- (18) (*Teorema de Riesz*). Deduza o seguinte:

Seja E um espaço vetorial normado tal que a bola unitária fechada $B_E := \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$ é compacta. Deduza então que E tem dimensão finita.

Sugestão: A demonstração será por absurdo. Se E tem dimensão infinita existe uma sequência de subespaços de dimensão finita $\{E_n\}$ de E , tais que $E_{n-1} \subset E_n$, $E_{n-1} \neq E_n$. O lema de Riesz permite encontrar uma sequência $\{u_n\}$, $u_n \in E_n$, $\|u_n\| = 1$ tal que $\text{dist}(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. Deduza que tal u_n não pode ter uma subsequência convergente. Daí conclua o resultado.

- (19) Usando o teorema de Riesz deduza que ℓ^2 não é localmente compacto .

OBS:

- *O teorema de Kakutani diz que se E é um espaço de Banach, então E é “reflexivo” se e somente se B_E é compacto para a “topologia fraca”.*
- *Sejam E e F espaços vetoriais normados. Quando $F = \mathbb{R}$ dizemos que uma transformação linear contínua $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear. O teorema de Hahn-Banach, diz que se $G \subset E$ é um subespaço vetorial e se $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo, então existe uma extensão linear e contínua $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ de g a todo o espaço E mantendo a norma, i.e $\|f\| = \|g\|$.*

Existem também formas geométricas do teorema de Hahn-Banach com várias conseqüências importantes na Análise Funcional. Por exemplo, vale o seguinte resultado:

Seja $F \subset E$ um sub espaço próprio de E ($F \neq E$). Segue então que existe um funcional linear contínuo $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ não identicamente nulo ($f \neq 0$), tal que $f(x) = 0, \forall x \in F$.

- (20) Considere (E, \langle, \rangle) um espaço vetorial munido de um produto interno \langle, \rangle . Deduza que o produto interno $\langle, \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.

- (21) Dê exemplo de um conjunto ortonormal infinito em ℓ^2 .

- (22) Seja $C^0[0, 2\pi]$ o espaço das funções contínuas com a norma

$$\|f\|_2 = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx. \text{ Considere o conjunto}$$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \dots$ Deduza que S é ortonormal.

- (23) Seja S um conjunto ortonormal de um espaço um espaço vetorial E munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Deduza que cada par de elementos distintos de S estão a uma distância igual a $\sqrt{2}$.
- (24) Considere $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja $S \subset E$ um conjunto ortonormal de E .
- (a) Seja u_1, \dots, u_n uma coleção finita de elementos distintos de S . Seja $x \in E$. Deduza que

$$\sum_{i=1}^n |\langle x, u_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (\text{desigualdade de Bessel})$$

Sugestão: Considere o vetor $x - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i$.

- (b) Seja $x \in E$. Deduza que o conjunto dos pontos $u \in S$ tal que $\langle x, u \rangle \neq 0$ é finito ou enumerável.

Sugestão: Dado $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto dos pontos $u \in S$ tal que $|\langle x, u \rangle| \geq \frac{1}{n}$.

- (c) Sejam x, y pontos de E . Deduza que

$$\sum_{u \in S} |\langle x, u \rangle \langle y, u \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

- (25) Seja E um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Vamos assumir que E seja completo (quando E não tem dimensão finita E é chamado de “espaço de Hilbert”). Seja $\{u_n, n = 1, \dots\}$ um conjunto ortonormal de E infinito e enumerável.

- (a) Deduza que a série $\sum_{i=1}^{\infty} c_n u_n$ é convergente se e só se $\sum_{i=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$.

Neste caso, seja $x := \sum_{i=1}^{\infty} c_n u_n$. Deduza a seguinte relação:

$$c_n = \langle x, u_n \rangle.$$

Sugestão: Considere a sequência das somas parciais em E , dada por $s_n = \sum_{i=1}^n c_n u_n$, mostrando que esta é uma

sequência de Cauchy, se e só se $\sum_{i=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$. Em seguida,

prove que $c_i = \langle s_n, u_i \rangle$ e use a continuidade do produto interno.

OBS: O teorema de Riesz-Fischer da teoria das séries de Fourier realiza concretamente o teorema acima. O teorema diz que

dadas seqüências a_0, a_1, a_2, \dots e b_1, b_2, \dots tais que

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) < \infty$$

então existe uma função $x(t)$ em $L^2(0, 2\pi)$ tendo a_n e b_n como seus coeficientes de Fourier, i.e

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos nt \, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin nt \, dt$$

A identidade de Parseval diz que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |x(t)|^2 \, dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Exercício: relacione os a_n e b_n com os c_n , dados no exercício anterior.